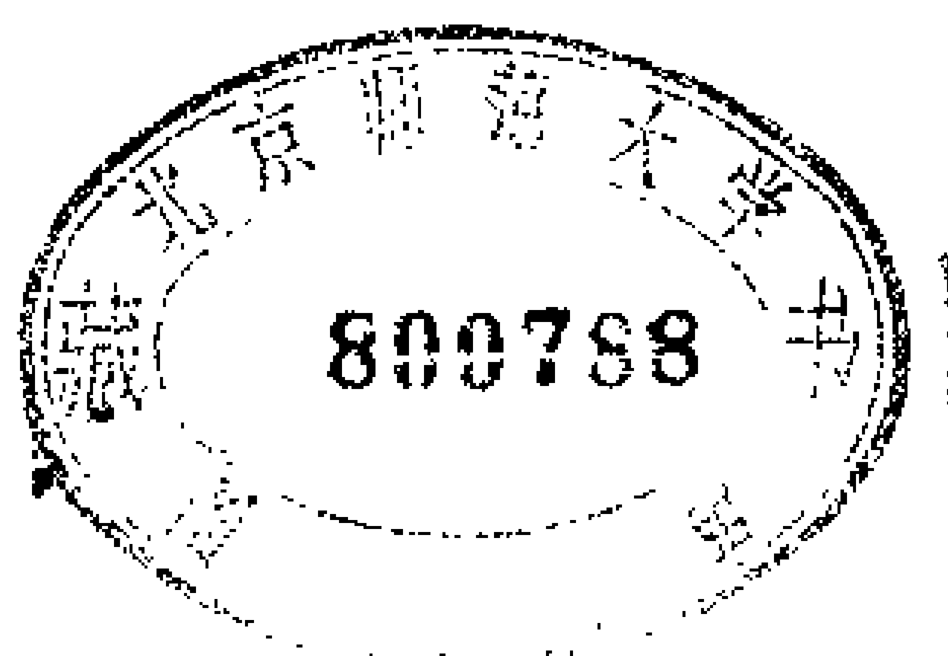
实数的构造理论

王建午 曹之江 刘景麟 编

人民教育出版社

实数的构造理论

王建午 曹之江 刘景麟 编



人民教育出版社

内容提要

本书的中心内容是介绍实数的构造理论. 全书包括绪论、正文和附录三部分. 绪论部分结合微积分学的思想发展史介绍实数构造理论产生的背景; 正文共分四章: 第一章简要地介绍有关集合论以及代数系方面的基本概念, 作为预备知识. 第二章扼要介绍自然数公理以及由自然数公理出发构造有理数域. 第三章介绍实数的康托尔构造. 第四章介绍实数的戴德金构造; 附录部分分别介绍了实数公理系统、实数的 p 进位无穷小数表示、连分数及代数数和超越数. 各章节末尾都附有一定数量的习题.

本书可供综合大学及师范院校数学系师生作教学参考书.

实数的构造理论

王建午 曹之江 刘景麟 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

黄冈报印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5 字数 115,000

1981年1月第1版 1981年6月湖北第1次印刷

印数 1—12,500

书号 13012·0555 定价 0.48 元

序

根据 1977 年秋季在上海召开的理科数学教材会议的建议,需要为综合大学和师范院校数学专业的数学分析课程，编写一本关于实数理论方面的补充教材或参考用书. 本书就是在这一建议下写的.

本书的中心内容是介绍实数的构造理论. 全书包括绪论、正文和附录三个部分. 绪论主要结合了微积分学的思想发展史，来介绍实数构造理论产生的背景，以使得读者对于这一理论的来龙去脉和它在分析学中的地位,有一个历史的概括性的了解.

正文共分四章. 第一章为预备知识，简要地介绍了有关集合论以及代数系方面的基本概念,以作为全书行文的准备,并使得本书在逻辑上自成系统(这样也便于自学的读者,能够独立地去阅读全书). 第二章扼要地介绍了自然数公理以及由自然数出发构造有理数域. 因为实数是从有理数出发构造出来的，因此本章的内容,也就为下两章讲述本书主题实数的构造准备了逻辑基础,此外它也为了使得读者可以预先熟悉一下数系扩张的方法.

第三章为本章的中心内容,介绍实数的康托尔(Cantor)构造. 这是一种从完备性要求出发而作出的实数构造法. 本书所以要选择康托尔构造作为重点，是因为这种用等价关系进行集合的分类而构造出新数域的方法，在近代数学中有普遍的意义. 本章对康托尔的实数构造论,进行了系统而详尽的叙述,最后并证明了实数完备性定理的各种形式，这样就使本书与现有的数学分析教材从逻辑关系上衔接了起来.

第四章介绍了实数的另一种构造——戴德金(Dedekind)构

造，这是一种从实数的连续性(完备性的几何形式)要求出发而作出的构造法．这种实数的构造由于几何直观性强，定义简明而为更多人所熟悉．在菲赫金哥尔茨所著《微积分学教程》一卷一分册(中译本)的绪论部分，就给出了实数这种构造的一个比较详细而又清晰的阐述，可以作为戴德金实数的基本教材．有鉴于此，因此本书在介绍戴德金构造时，就采取了一种不同的方式，即在没有引人实数的运算而仅有实数的顺序的情况下，完成了关于实数的连续性和完备性的所有定理的证明．本书的这种叙述方式，也许在一定的程度上，减弱了戴德金分割(Dedekind cuts)的直观形象，但却有利于读者对于极限及实数的连续性本质的深入理解．我们认为，对于勤于思索的读者来说，这也许是更有裨益的．至于戴德金实数的运算，则通过建立它与康托尔实数之间的保序同构对应来实现，这样也就避免了戴德金实数构造论中最冗繁的部分．当然，我们也可以不依赖于康托尔实数，去建立戴德金实数的运算(见本章习题)．因此本章和第三章，都可以独立地进行阅读．

附录分别介绍了实数的公理系统、实数的p进位无穷小数表示、连分数及代数数和超越数，目的是使有兴趣的读者，除了阅读本书的基本部分以外，还可以进一步接触一些实数理论方面生动而富有启发性并且有较高技巧性的内容．

本书各章节的末尾，都附有一定数量的习题，以便于读者进行自学．书的末尾附有参考书目．

本书是三人合力写成的，其中绪论、第一章、第二章和附录4，由曹之江执笔，第三章由刘景麟执笔，第四章及附录1、2、3，由王建午执笔，最后由刘景麟对全稿进行了统一修正．由于我们对本书内容教学实践不多，加上时间仓促，因此在书的编写体裁和内容安排上，不妥和错误之处，在所难免，特别是各章节习题部分，更是感觉不够完满，诚恳希望兄弟院校的同志们及广大读者，对我们提

出批评建议．我校陈杰教授，详细地阅读了本书全稿，提出了许多重要修改意见，使我们得以改正原稿中许多不当之处，在此表示深切地感谢。

编　　者

1979年6月于内蒙古大学

目　录

绪　论

数，是我们每天都要与之接触、须臾不能或离的对象．我们每一个人，从童稚之年开始，就学习与运用它．对于它，我们是如此之熟悉，以至于提起它，便犹如看见周围的山岳河川一样，感到亲近而明白．

但并不是每一个人，都考虑过一个问题：这些我们无时不在读、写、算的数，是从那里来的？也许我们有些人，并没有意识到，这些如山岳河川一样为我们所熟知的数，它们既非自然的天赋，更不是上帝的恩惠．

数，是人类文明的伟大创造．人类在争取生存、进行生产活动的长期实践中，创造了数．在几千年的历史中，人类对数的认识，经历了一个由表及里、由浅人深的过程．今天，我们所应用的数系，已经构造得如此完备和缜密，以致于在科学技术和社会生活的一切领域中，它都已成为一种基本的语言和必不可少的工具了．我们今天在得心应手地享用这份经过长期历史沿革的现成财富时，常常未曾想到前人在形成和发展数的过程中，所经历的曲折和艰辛．

数作为一种语言，同人类其他语言一样，是一种交际的工具．它也是人类在长期的生产和交换过程中逐渐形成的．要考查远古人类如何创造了数，当然无案可稽，因此今天我们也只好进行一些假想和猜测．人类的祖先在起初的时候，也许只会用物物逐一比较的办法，来分别多寡，以后则学会了将物与第三者（如人体上的手指、墙上的刻痕或悬挂的绳索等）来进行间接的比较．从而逐渐产生了不依附于具体对象的“个数”概念．以后随着生产和交换活

动的不断扩大，这种"个数"概念也就逐渐被赋予了某种记号或语音，这就产生了最早的数.

人类最初掌握的数，个数是很少的．在近代尚残存的原始部落中，人们发现他们所掌握的数，均未超过二十，这大概与人的手指与足指的总数是二十有关．某些原始部落能数的数，甚至不超过三．随着人类社会的进步，数的语言也不断发展和完善，其中应当提一下的是进位记数法的产生．所谓进位记数法，就是运用少量符号，通过它们不同个数的排列，去表示不同的数(例如现在通行的十进位法，就是用 0、1、2、…、9 这十个符号，通过它们的不同个数的排列，去表示所有的数)．进位记数法的产生，一方面使得记数的范围得到无限地扩大，另一方面，也使得复杂的算术运算，有了实施的可能(比如，没有十进位法，也就不可能有九九乘法表)．因此，进位记数法的出现，标志着人类掌握的数的语言，已从少量的文字个体，发展到了一个具有完善运算规则的数系．人类第一个认识的这个数系，就是常说的"自然数系".

当然，今天我们用现代的眼光来考察问题，自然数系则还远不是完美无缺的．由于自然数系是一个离散的、而不是稠密的数系(*)，因此作为量的表征，它只能限于去表示一个单位量的整倍，而无法去表示它的部分．例如在一条线段上，自然数只能去表示那些较单位长是整倍的长度，而不能去表示它的一半、或若干份之一．同时，作为一种运算手段而言，自然数系也表现出明显的缺陷．在自然数系内部，只能施行加法和乘法，而不能自由地施行它们的逆运算，也就是说，方程 $x+a=b$ 和 $ax=b$ 在一般情况下，并不一定可解．这种运算上的障碍，当然是极不方便的．随着人类文明的发展，自然数系的缺陷，也就逐渐显露出来，这就促使人们

(*) 一个数系称为是稠密的，假如任意取这数系中两个数，必有第三个数介于其间．

将它加以扩充，以期得到一个稠密的、并且在加、减、乘、除四则运算下封闭的数系，这就是后来得到的有理数系.

人类认识数系的早期历史，由于年湮代远，已无从确切稽考了．但是从有限的记载中，我们可以看到，在掌握了自然数以后，人们较早得到了分数．所谓分数，就是把两个自然数相除所得之商（不论其能否整除）当作一个数，然后对其引进相应的运算法则，这样的数就形成了分数系．容易证明，分数系是一个稠密的数系，它对于加、乘、除三种运算是封闭的．为了使得减法运算在数系内部也通行无阻，人们后来又引入了负数和零，这样就把分数系扩展成了有理数系．负数和零，虽然无从考究其产生的确切年代，但它们之被人们所普遍接受，则是较晚的事情．在欧洲，负数虽然由阿拉伯较早传人，但是在十六、十七两个世纪内，绝大部分数学家并不承认它们是数，有人则称负数为“谬数”.

有理数系，因为克服了自然数系的缺陷，相对来说，已是比较完美的数系．由于有理数系具有稠密性，因此古希腊人曾设想它是同一条无限直线上的点相对应的、一个从小到大的量的连续排列的长河．但是这种关于数的连续性的设想，这种算术与几何自然和谐的美妙图象，不久却被希腊人自已证明是完全错误的.

在纪元前五百年左右，古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras)学派发现了一个惊人的事实：一个正方形的对角线与其一边的长是不可公度的！换言之，若正方形的边长是一单位，则其对角线的长竟不是一个数（用现在的语言来讲，即$\sqrt{2}$不是一个有理数(*)）．这个不可公度性，与毕达哥拉斯学派的“万物皆为数”的哲理大相径庭，因此它的发现，引起了这个学派的人如此的惶恐与恼怒，以至

(*) 这事实可证明如次：用反证法．设$\sqrt{2}=b/a$，其中a、b为互质的整数，则可得$b^2=2a^2$，由此推知b可为2整除．令$b=2c$，代入上式可得$2c^2=a^2$，又可推知a可为2整除，这就与a、b为互质的假设矛盾.

据传发现这一事实的希勃索斯(Hippasus)，竟遭到沉舟身死的惩处.

毕达哥拉斯学派的发现，第一次向人们揭示了有理数系的缺陷，证明它不能同连续的无限直线等量齐观. 它告诉人们，有理数并没有铺满数轴，在数轴上存在着不能为有理数所表示的"孔隙"，而这种"孔隙"，经后来人证明，简直多得"不可胜数".

这样，古希腊人把有理数视为是连续衔接的那种算术连续统的设想，就彻底地破灭了. 它的破灭，在以后两千多年时间内，对数学的发展，起到了深远的影响. 不可通约的本质是什么？长期以来众说纷纭，得不到正确的解释. 而两个不可通约量的比值，也一直被认为是不可理喻的数. 十五世纪利奥那多·达芬奇 (Leonardo da Vinci) 把它们称为是"无理的数"，十七世纪伟大的天文学家开普勒(J. Kepler)在他的著作中，把它们称为"不可名状"的数. 这些"无理"而又"不可名状"的数，虽然后来在运算中亦被通用，但是它们究竟是不是实在的数，却一直是个困扰人的问题. 在十九世纪之前的漫长历史中，人们一直不把它们当作"真正的数".

不可公度的发现，给数学的发展，带来了新的问题与困难. 既然不能克服它，那就只能回避它. 这大概是为什么从毕达哥拉斯以后的希腊数学，侧重于几何学的原故. 古希腊的几何学，采取了将几何与算术严格区分的办法，希腊数学家欧多克斯(Eudoxus)、欧几里得(Euclid)在他们的几何学里，都严格避免把数与几何量等同起来. 他们那种以直觉为基础的几何学，其几何关系的归纳与演绎，完全藉助于几何量本身来表述，而并不求助于数. 欧多克斯的比例论(见于欧几里得几何原本第五卷)，使几何学在逻辑上绕过了不可公度的障碍，这就在以后的漫长时期中，形成了几何与算术的显著分离.

但是这种几何与算术割裂、对不可公度讳莫如深的状况，是不

能长期继续下去的．这个问题，随着十七世纪以后，一门崭新数学——微积分的应运而生，显得更加突出了．

孕育于希腊时代的微积分的思想与方法，经过了漫长时期的酝酿，到了十七世纪，在工业革命的刺激下，终于通过牛顿(I. Newton)和莱伯尼兹(G. W. Leibniz)的首创脱颖而出了．以后又经过以欧拉(L. Euler)、拉格朗日(J. L. Lagrange)、达朗贝尔(J. L. D'Alembert)、拉普拉斯(P. S. Laplace)等为代表的一代数学家的发展和在各个应用领域的推广，取得了伟大的成功．然而，这个以磅礴气势向前发展的微积分学，其创建伊始，由于缺乏一个完备的数域作为其论域，因此只好将其演绎体系建立在以直观为基础的几何学与运动学的连续性上，这就形成了方法上有效但逻辑上不能自圆其说的矛盾局面．无怪有人认为，初期的微积分，与其说是一门立论严谨的学说，毋宁说是一种新颖的解题方法．

事实上，微积分方法的基础——无论是牛顿的"流数"，或者是莱伯尼兹的微分，在微积分创立后近两个世纪的时间内，一直遭到各种怀疑和非议．法国启蒙思想家伏尔泰(Voltaire)曾称微积分是一门"精确地计算和度量其存在无法想像的东西的艺术"．而牛顿的"流数"，则被英国主教贝克莱(B. Berkeley)讥笑为"逝去了量的鬼魂"．微积分学逻辑基础上的严重问题，虽然暴露了出来，但是并没有能够及早地得到解决．十七、十八两个世纪的数学家们，在数学的拓荒工作中，正取得前所未有的硕果，因而他们更热衷于向前走，没有感到需要回过头来，整理一下自己的基础．

到了十九世纪上半叶，分析学已经经历了近两个世纪非凡的历程，因此无论是在内容上或方法上，都已经是硕果累累．然而，在另一方面，却正如阿贝尔(N. H. Abel)在给友人的一封信中所抱怨的那样："在高等分析中，仅有极少数的定理是在逻辑上像样地叙述出来的．"数学分析已达到的巨大成就，与它那仍然是落后而

又混乱的逻辑基础，形成了极不相称的对照．实际上，数学分析业已发展到了这样的阶段，它的那些新的、更加深刻的结果，凭着过去那样的、从几何与物理的直观出发来进行的粗略推证，已经是绝不能得到了．那种十七、十八世纪流行的、使得现代人瞠目结舌的推理方法，已不能再适应数学分析继续前进的步伐．这种情况，促使十九世纪的许多数学家，回过头去重整分析的逻辑基础．

十九世纪分析学理论基础的重建，主要以波尔查诺(B. Bolzano)、柯西(A. Cauchy)、阿贝尔、狄里克雷(P. L. Dirichlet)、维尔斯特拉斯(K. Weierstrass)等人的工作为标志．柯西被公认为是近代分析学的主要奠基人．他在十九世纪二十年代陆续发表的三个著作中，革新了微积分中长期沿袭下来的模糊的旧观念，重整了它的理论，把它纳入到一个新的严密的理论体系之中．在关于微积分基础的混沌一片的争议中，柯西看出核心的问题是极限．这是一个自纪元前三百余年亚里士多德(Aristotle)将齐诺(Zeno)悖论(*)公诸于世以来，一直为人们争议不休的问题．柯西第一次使极限观念摆脱了与几何和运动直观的任何牵连，给出了只建立在数与函数概念上的清晰的定义(这个定义后来为维尔斯特拉斯进一步精确叙述)，从而使一个模糊不清的动态观念，变成为一个

(*) 齐诺(纪元前495—435，死于死刑)是古希腊哲学家，提出过四条悖论，记载于亚里士多德全集中．他的悖论与同时代毕达哥拉斯学派关于不可公度数的发现，引起了古代哲学家们很大思想上的动荡与长期的争论，对于二千年来数学思想的发展，有着深远的影响，被认为是数学思想发展史中的三大危机之一．其悖论简介如下：

(i) 阿其里斯(希腊马拉松选手)永远追不上乌龟：因为当阿其里斯跑到乌龟所在点，乌龟已爬到新的地点了，当他又跑到乌龟所在点，乌龟又到了新的地点，这样过程永无完结，所以永远追不上乌龟．

(ii) 两分法：飞着的箭永远射不到靶，因为箭必须经过中点，再经过下一半路途的中点，而这样的中点是无穷尽的．所以箭永远不能射到靶．

(iii) 飞箭：飞着的箭是静止的，因为箭的每一瞬都只经过一点，而点的长度为0，因而无论多少点加起来都是0．

(iv) 竞走：假若空间和时间是由点和瞬间组成的，则即可证明，时间不可能由瞬间组成．

严密叙述的静态观念，这不能不认为是变量数学史上的一次重大创新．在极限有了严格定义以后，柯西就定义了令人费解的“无穷小”．他把无穷小规定为极限为0的变量，这样就把无穷小归入到了函数的范畴，再也不是混在阿基米得(Archimedes)数域(*)里的一个桀骜不驯的冥灵了．

在极限和无穷小重新定义的基础上，柯西进而澄清了存在于连续、导数、微分、积分、无穷级数…等概念上的模糊，从根本上革新了旧的理论系统，实现了微积分学基础的一次革命．柯西所创立的分析体系，虽然在语言叙述上，为后来维尔斯特拉斯进一步精确化，但其基本观念，为整个数学界所承认，并成为近代分析教程的基础内容．分析基础的这一革新，不仅为数学分析的进一步发展，奠定了稳固的基础，而且对整个近代数学的发展，产生了深远的影响．

当然，从现代的眼光来考虑，柯西等人所作的工作，尚有不严密与不完善之处．应该说，柯西等人构造了分析学逻辑体系的主要轮廓，而后来的人则最后完成了它．在柯西的工作中，最不足之处，是他对于数学分析立论的基础——实数，没有给出一个严格的定义．微积分是建立在极限运算基础上的变量数学，而根限运算，需要一个封闭的论域，正如算术四则运算，需要有一个封闭的数域一样．于是事情又回到了两千多年来未得解决的数域的连续性问题上来了．

无理数是什么？柯西对这个问题，作了一个表面的回答．他定义无理数就是有理数序列的极限．然而按照柯西的极限定义，所谓有理数序列有极限，意即预先存在一个确定的数，使它与序列中各数的差值，当序列趋于无穷时，可以任意小．但是，这个预先存在的“数”，又从何而来呢？这就产生了概念自身的循环．在柯

(*) 阿基米得数域是指满足如下条件的数域：对于域内任意两正数 $a<b$，必存在自然数 n，使 $na>b$．

西看来，有理数序列的极限，似乎是先验地存在的，这种想法，说明柯西尽管在许多地方见解超人，但仍然未能完全摆脱掉两千多年来以几何直觉为立论基础的传统观念的影响.

因此，必须在不依赖于极限的基础上，去独立地定义无理数，建立一个对于极限运算是完备的封闭数域，这对于奠定一门独立的分析学的严密基础，是绝对不可缺少的. 数学分析须要彻底地从几何直觉中解脱出来，建立起自己独立的体系. 直观，常常是我们思考问题的导引，但是，正如波尔查诺、维尔斯特拉斯所举出的连续不可微函数的例子对人们作出的启示那样，它并不总是可靠的.

变量数学独立建造自己完备数域的历史任务，终于在十九世纪后半叶，由维尔斯特拉斯、梅莱(C. Méray)、戴德金 (R. Dedekind)、康托尔(G. Cantor)等人加以完成了. 这个完备的数域，就是实数域. 实数域的构造成功，使得两千多年来存在于算术与几何之间的鸿沟，得以完全填平，无理数不再是"无理的数"了，古希腊人的算术连续统的设想，经过两千多年时间以后，终于在严格的科学意义下得以实现. 新生的微积分学，经过了一段曲折的道路，现在彻底驱散了笼罩的疑云，步入了一个崭新的历史阶段.

本书的第三、四章，对于完备的实数域，将系统地介绍两种独立的、然而是等价的沟造法，即康托尔和戴德金的构造法.

应当指出，实数域的构造成功，并没有终止人们对于数系的认识. 本世纪六十年代，美国数理逻辑学家罗宾逊(A. Robinson)提出了一种非标准数的理论，这个理论应用了近代数理逻辑的成果，用严密的推理，将实数域扩充成一个更广的非阿基米得数域. 人们有趣地发现，被柯西从数域中排除出去的无穷小，经过否定之否定，现在又回到数域中来，并占据了合法的席位，就如今天的无理数占据着实数域中合法的席位一样. 关于非标准数的理论，由于涉足较远，已超出本书范围. 有兴趣的读者可参阅有关的书刊[14].

第一章　预备知识

§1　集合及其运算

集合是由一些我们能够辨认的对象所组成的(*)．所谓"能够辨认"，是指我们有一定的准则或办法，据此可以对任一对象，判断其属于或不属于这个集合．任何对象，要就属于这个集合，要就不属于这个集合，二者必居其一且仅居其一．属于集合的对象，就称为该集合的元素．例如：

1）能被2整除的自然数的全体，组成一个数的集合．每个正偶数都是这个集合中的一个元素，而其它的数都不属于这个集合．

2）坐标x、y满足不等式$x<y$的点(x,y)的全体，组成坐标平面上的一个点的集合，而在直线$x=y$上方的每一个点，都是这集合中的元素．

3）区间[0,1]上的连续函数的全体，组成一个函数的集合，定义在[0,1]上的每一个连续函数，就是这集合的一个元素．

习惯上，常以A、B、C、…等表示集合，而以a、b、c、…或α、β、γ、…等表示集合的元素．若a为集合A的一个元素，则称a属于A，记为$a\in A$．否则，就称a不属于A，记为$a\overline{\in} A$．

一个集合，我们可以用穷举其元素于一花括弧内的办法去表示它，如$A=\{a,b,c,\cdots\}$．在更多的场合，我们常通过列出这集合

(*) 从逻辑学观点看，整个数学就是集合论和它的推论．近一个世纪来，集合论得到了很大的发展，建立了各种公理系统．由于本书的主旨是讨论实数的构造．因此我们将避免涉及集合论的一些较深人的问题．本章将对集合论的一些基本概念，进行描述性的介绍，以满足以后章节行文的需要．

所赖以确定的性质 P，去表示这个集合，如 $A=\{x|P\}$，其中 x 是 A 中元素的通用符号，而 P 则代表 x 所具有的性质. 例如，若 A 为方程 $x^2-2x-3=0$ 的根的全体，则它可以表示为 $A=\{-1,3\}$，同时也可以把它表为 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$.

定义 1 若集合 A 的任何元素都是集合 B 的元素，则称 A 包含于 B，或称 A 为 B 的子集，记为 $A\subseteq B$；若 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则称 A、B 相等，记为 $A=B$；若 $A\subseteq B$，但 $A\neq B$，则称 A 真包含于 B，或称 A 为 B 的真子集，记为 $A\subset B$.

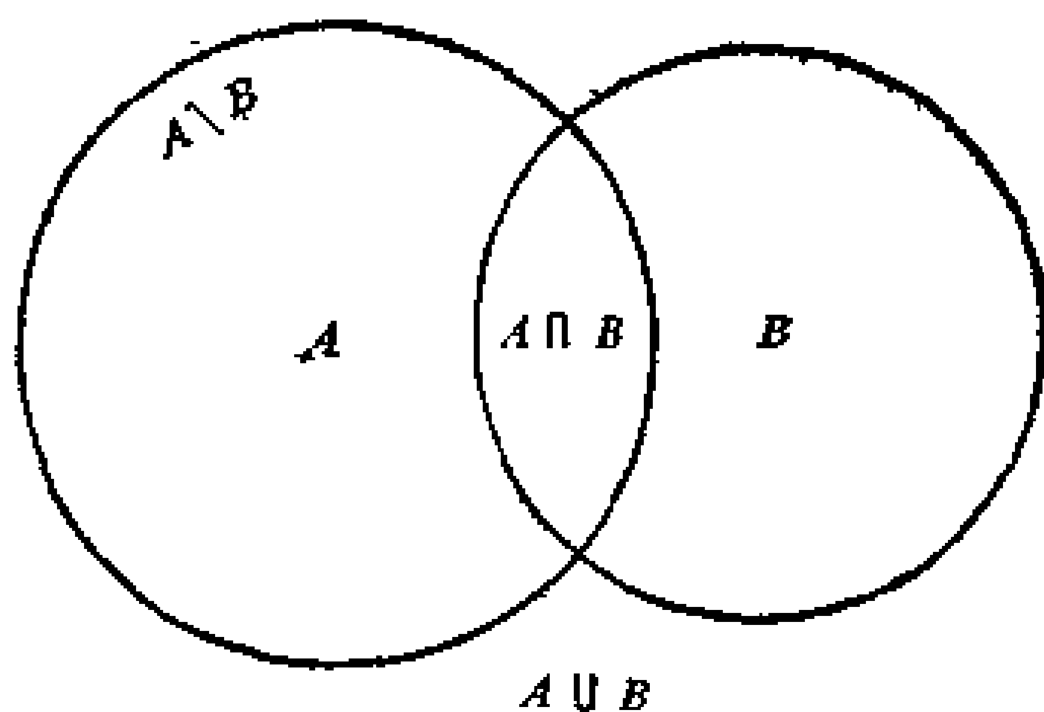
例 A、B 为坐标平面上的点集合：$A=\{(x,y)||x|+|y|<1\}$，$B=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$，读者试自行证明 $A\subset B$.

为了行文方便，通常把"一无所有"即不含任何元素的集合称为空集，记以符号 $\varnothing$. 例如，

$$\{x|x\text{ 是整数},3x-2=0\}=\varnothing.$$

我们规定空集包含于任何集.

定义 2 A、B 为两集，则集合 $\{x|x\in A\text{或}x\in B\}$ 称为 A 与 B 的和集(或并集)，记为 $A\cup B$；集合 $\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}$ 称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$；集合 $\{x|x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$ 称为 A 与 B 的差集，记为 $A\backslash B$.



根据定义，我们有 $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$; $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$; $A\backslash B\subseteq A$.

集合运算具有下列性质:

1° $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

2° $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

3° $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

4° $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

5° $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap B)$.

我们只证明3°,其余各条证明留给读者.

3°的证明: 任取元素$a\in A\cap(B\cup C)$,由交集的定义,知$a\in A$,同时$a\in B\cup C$. 再由和集的定义知$a\in B$或$a\in C$. 于是推知$a\in A\cap B$或$a\in A\cap C$,因此,$a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 这就证明了$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$;反过来,任取元素$a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,则由定义知$a\in A\cap B$或$A\cap C$. 若$a\in A\cap B$,则$a\in A$同时$a\in B$;若$a\in A\cap C$,则$a\in A$同时$a\in C$. 不管怎样,总有$a\in A$且$a\in B\cup C$,因此$a\in A\cap(B\cup C)$. 这就证明了$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$. 结合上面已证的包含关系式即得$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 证毕.

习 题

1. 数轴上的点集A、B、C定义如下:

$$A=\{x\mid |x-1|<2\}$$
$$B=\{x\mid |2x+1|>3\}$$
$$C=\{x\mid x^2-4x+3<0\}$$

证明$A\cap B=C$.

2. 证明摩根(de Morgan)公式

$$X\backslash(A\cup B)=(X\backslash A)\cap(X\backslash B)$$
$$X\backslash(A\cap B)=(X\backslash A)\cup(X\backslash B)$$

3. 令$A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$,称为集合$A$与$B$的对称差. 试证明:

$$A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$$

$$A\triangle B=B\triangle A$$

4. 设 $X=\{a,b\}$，考虑X的一切子集组成的集合$\mathscr{D}(X)$，试列表给出$\mathscr{D}(X)$上集合的对称差.

§2 映射与势

定义 3 若在集合A与B之间，存在一个元素间的对应法则f：使得对于A中任一元素a，必有B中唯一的一个元素b与之对应，则称f为A到B的一个映射(或函数)，记为$f: A\to B$.

在映射f下，B中与A的元素a对应的元素b，称为a的像，记作$f(a)=b$；而a则称为b的原像；集A称为映射f的定义域；集合$\{f(a)|a\in A\}$称为f的值域，记作$f(A)$，它是B的一个子集.在一般情况下，$f(A)=B$并不成立．若$f(A)=B$，则称f为A到B上的映射(简称f为映上的)；若$f(A)\subset B$，则称f为A到B内的映射(简称f为映入的)．注意，无论f是A到B上或到B内的映射，对于$b\in f(A)$来说，它在A内的原像都可以不是唯一的.

设f为A到B上的映射．若对于任何$b\in B$，都仅有唯一的$a\in A$，使$f(a)=b$，则称f为A到B上的一对一的映射．此时，对于任一$b\in B$，必有A中唯一的一个元素，即b的原像a与它对应，这个由b到a的对应，构成了B到A上的一个映射，称为f的逆映射，记为f^{-1}．显然，逆映射仅当f为一对一的映射时才存在，易见它也是一对一的映射，并且有$(f^{-1})^{-1}=f$.

在数学分析课程中讨论的实变量函数，就是实数轴上的点集到实数轴自身的映射．因此，一般的映射概念，乃是寻常函数概念的拓广.

例 函数$y=\ln x$为$(0,\infty)$到$(-\infty,\infty)$上的一对一的映射．函数$y=e^x$为$(-\infty,\infty)$到$(0,\infty)$上的一对一的映射，它们互为

逆映射(*).

定义 4 若 f 是集 A 到集 B 的映射，$f(a)=b$，g 是集 B 到集 C 的映射，$g(b)=c$，则 a 到 c 的对应确定了一个由 A 到 C 的映射，称为映射 f 和 g 的积，记为 $g\circ f$. 于是 $(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=c$.

一个集的任何元素均对应于自身的映射，称为恒等映射，记为 I. 显然，一个一对一的映射 f，与其逆映射的积，必为恒等映射，亦即有 $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$.

一个集合，其元素的"个数"，是这个集合的重要特征. 如何去比较两个集合元素个数的多寡呢？在有限集合的情况下，我们常采用的办法是将两集合的元素作一一对应. 举例来说，设集合 A 表示某教室座位的全体，集合 B 表示某班学生的全体. 为了比较 A 与 B 的元素个数的多寡，所用的办法就是将 B 的元素——学生，都送到教室里去，让他们与 A 的元素(座位)作一一对应. 假如每一个学生都占据了一个座位，反过来，每一个座位都坐着一个学生，也就是说，A、B 之间存在一个一对一的映射，这时我们就说，A 与 B 具有相同的个数. 这个方法，可以用来对一般的集合之间进行元素个数的比较.

定义 5 在集合 A 与 B 之间，若存在一个一对一的映射，则称集合 A 与 B 是对等的，记为 $A\sim B$，或者说，A 与 B 具有相同的势(**).

(*) 本书以论述实数构造为主题，但在本章，为了说理方便，我们并不回避列举实数集的例子，这在逻辑上，无悖于以后的论述.

(**) 根据定义，可知集合之间的对等满足以下三条：

i）对于每个集合 A，都有 $A\sim A$；

ii）若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

iii）若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

由本章下一节的讨论，即知集合之间的对等是一种等价关系，在这种等价关系下，对等的集合都属于同一等价类. 所谓集合的势，乃是该集合所属等价类的标志，它完全确定了那个等价类.

以$\overline{\overline{A}}$、$\overline{\overline{B}}$分别表示集合A、B的势，则$A\sim B$也可以表示为$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 空集$\varnothing$的势记为0，即$\overline{\overline{\varnothing}}=0$.

若A与B不对等，但A与B的一个子集对等，此时我们称A的势小于B的势，或称B的势大于A的势，记作$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$或$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$.

我们以N记自然数全体所成之集，设k是任一自然数，以N_k记一切不大于k的自然数所成之集，称为自然数(由k截得)的一节.

定义 6 任何与自然数某一节等势的集，称为有限集. 否则，就称为是无限集. 空集规定为有限集.

显然，任何两个非空的有限集，当且仅当它们与自然数的同一个节N_k对等时，才是等势的. 因此，一般集的"等势"，乃是有限集的具有相等个数元素一语的拓广. 而对于有限集N_k来说，它的势是由k唯一确定的，因而我们可以直接用自然数k来表示它. 于是，有限集的势就是我们平常所了解的元素的"个数"，而势的相等和大小，也就是寻常自然数之间的相等和大小.

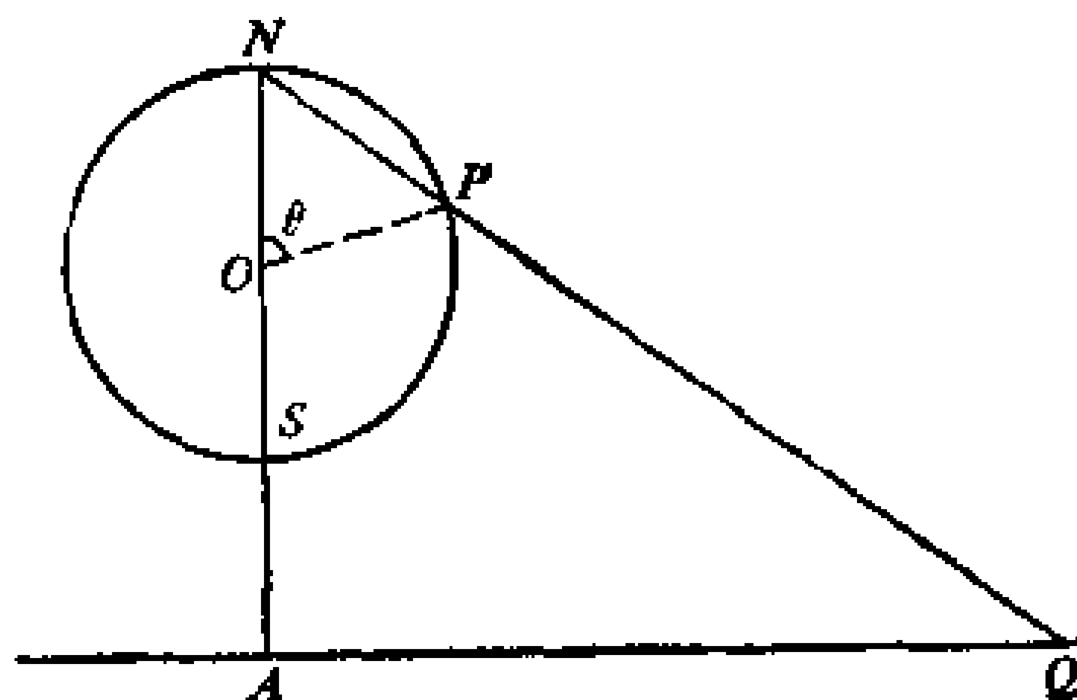
自然数集N，不能与它的任何一节对等，因此是一个无限集. 自然数集的势，我们用字母$\aleph_0$(读作阿列夫零)表示，即$\aleph_0=\overline{\overline{N}}$，显然$\aleph_0$不等于任何自然数，它大于任何自然数.

［**例 1**］ 全体偶数通过一对一的映射$f:2n\to n$(n表示任何自然数)可与自然数集建立对等关系，因此偶数集与自然数集是等势的.

［**例 2**］ 区间$(0,1)$上所有实数通过映射$f:x\to 100x$可与区间$(0,100)$上所有实数建立对等关系，因此$(0,1)$与$(0,100)$上的实数是等势的.

［**例 3**］ 如15页图，AQ是一条无限长直线，NS是圆的直径，$NA\perp AQ$. 在圆周上任取一点$P(P\neq N)$，连接NP并延长，使交直线AQ于Q，这个由P到Q的步骤就构成了圆周(除去点N)到无

限长直线 AQ 的一个映射. 这个映射是一对一映上的，因为对于直线上的任一点Q, 连接NQ, 必交圆周于唯一的点 P. 这样我们就证明了去掉一个点的圆周和无限长直线，作为点集来讲是等势的.



上例中，若取 A 为坐标原点，直线 AQ 为横轴，AN 为纵轴，并设 $AS=1$, 圆半径 $OS=ON=1$, 记 $\overset{\frown}{NP}$所对的圆心角为 θ, 则 P 点的坐标为$(\sin\theta, 2+\cos\theta)$. 令 Q 点坐标为$(x, 0)$, 则不难写出映射 $P\to Q$ 的解析表示式为 $x=3\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$ $(0<\theta<2\pi)$.

以上各例说明，一个无限集可以与它的一个真子集等势，而这是任何有限集都没有的一个性质. 无限集的这个特性也可以用来作为无限集的定义.

在集合论里面，关于集合的势，证明了如下命题[4].

命题 1 1° A、B 是任意两集，$\overline{\overline{A}}$、$\overline{\overline{B}}$是它们的势，则关系 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$、$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$、$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$三者必居其一且仅居其一.

2° 若集 A 的势大于 B 的势，B 的势大于 C 的势，则 A 的势大于 C 的势.

上述命圆告诉我们，对任何两个集，它们的势总是可以比较的，而且可以像有限集那样，按元素“个数”的多寡，排列出大小顺序来.

与自然数集对等，亦即势为 $\aleph_0$ 的集，常称为可数集. 所谓可数，就是指集合的元素，可以像自然数那样，一个接一个地加以数出来. 实际上，一个可数集中与自然数 n 对应的元素若记为 x_n,

那末这个可数集就可以表示为$\{x_1, x_2, \cdots\}$.

定义 7 设f是自然数集N到集A的一个映射，令$a_n=f(n)$为自然数n的像. 若将值域$f(N)$中的全部元素，按其原像(自然数)的大小顺序排列起来，即得$a_1, a_2, \cdots$，称为集A上的一个序列(简称为序列)，a_n称为是这序列的第n项. 序列常记为$(a_1, a_2, \cdots)$或(a_n).

下面证明一个重要的命题.

命题 2 有理数全体组成的集Q是一个可数集.

为证明本命题，我们先证明下述**辅助命题**:

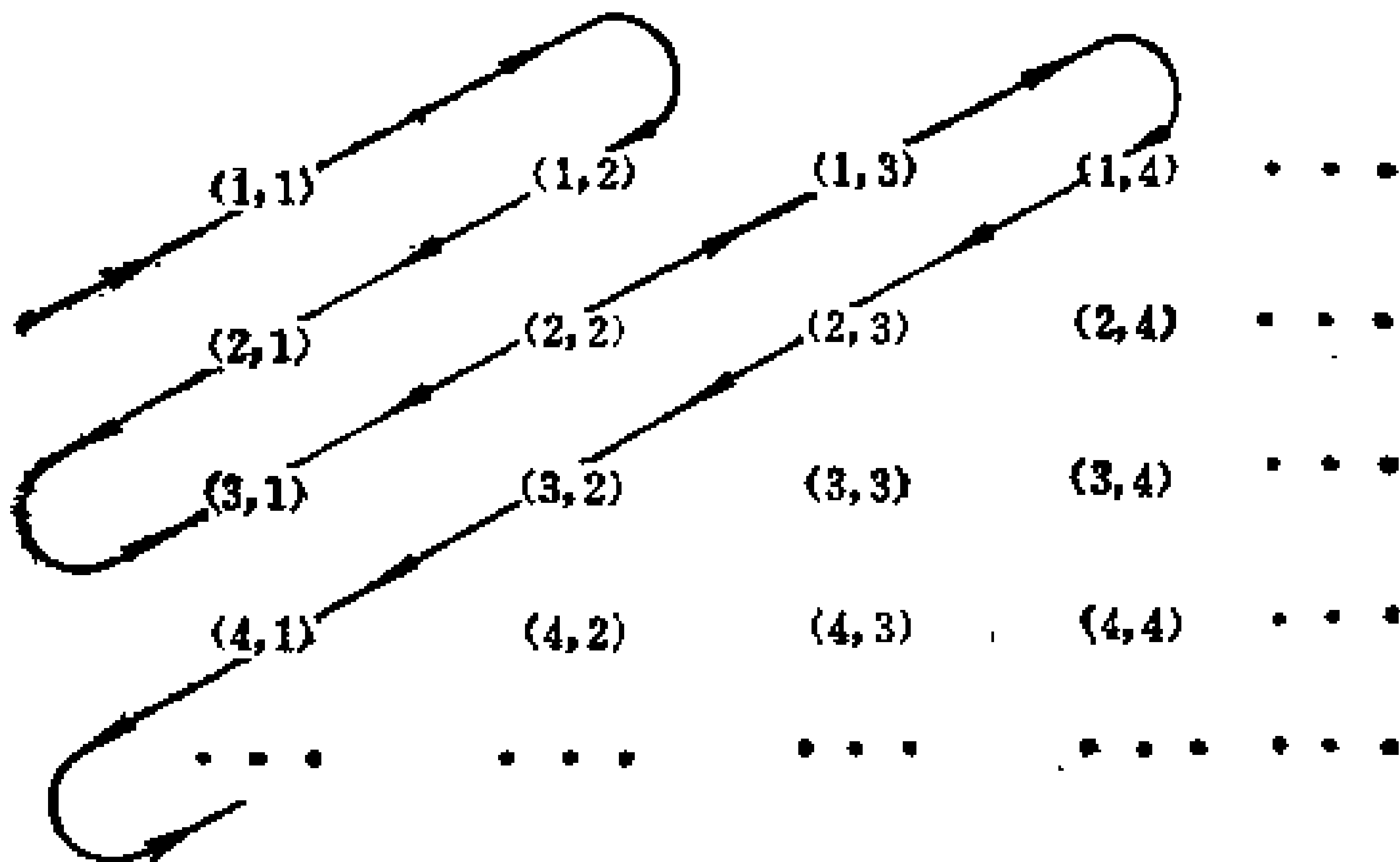
(1) 一集合为可数的充分必要条件是它的全部元素可以排成序列: $a_1, a_2, \cdots$.

(2) 可数集与可数集(或有限集)的和集仍为可数集.

(3) 可数集的任何无限子集仍为可数集.

(4) 自然数偶全体组成的集$M=\{(m, n) | m、n \text{ 自然数}\}$是一可数集.

辅助命题证明 命题(1)、(2)、(3)，读者可作为练习自行证明. 为证明(4)，我们将M中的全部元素列出如下:



在上述表中，按照箭头所示的对角线方向，即可将M中的全部元素排成序列，从而证明M为一可数集.

命题 2 的证明 以Q_+、Q_-分别表示正、负有理数集，由于$Q=Q_+\cup\{0\}\cup Q_-$，而Q_+与Q_-显然是对等的，因此根据辅助命题(2)，只须证明Q_+为可数集即可. 今将Q_+中任一元素$\frac{n}{m}$(m、n互质，并规定m、n为恒正)与M中的元素(m, n)对应，这个对应构成了Q_+与M中的一个无限子集M'的一对一的映射，据辅助命题(3)，M'为可数集，因而Q_+亦为可数集，从而证明Q是可数集. 命题证毕.

读者还不难证明如下简单事实：

命题 3 无限集必含有可数子集.

这个事实告诉我们，可数集乃是"最小"的无限集，因而$\aleph_0$是最小的无限集的势.

有没有势大于$\aleph_0$的无限集呢？康托尔在 1872 年证明了：(0, 1)上的全体实数，是一个势大于$\aleph_0$的集，从而第一次证明了存在不可数的无限集. 实数集的势，常称为连续统的势，以字母c表示. c大于$\aleph_0$这个事实的证明，我们将在本书附录 II 中给出. 下面举出一个不可数集的例子.

例 S是一切由自然数组成的序列$(a_1, a_2, \cdots)$所组成的集合，$S=\{(a_n)\,|\,a_n\in N\ (n=1, 2, \cdots)\}$. 我们证明$S$是一个不可数集. 用反证法. 假如$S$是一个可数集，则可将其元素排列成序列：$s_1$、$s_2$, …, 其中

$$s_1=(a_{11}, a_{12}, \cdots)$$
$$s_2=(a_{21}, a_{22}, \cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

今取S中的元素$s=(a_{11}+1, a_{22}+1, \cdots)$，这个元素必排在$S$的序

列之中，因而一定对应一个号码，比如 $s=s_j$. 因为 s_j 的序列中第 j 项是 a_{jj}，而另一方面，由 s 的选法，知它的第 j 项是 $a_{jj}+1$，这就导致矛盾. 这个矛盾说明 S 不可能是可数集.

有没有势比 c 大的无限集呢？在集合论里证明了如下事实：若 T 是由集合 M 的一切子集所组成的集，则 $\overline{\overline{T}}>\overline{\overline{M}}$. 因此，无限集没有最大的势.

习　题

1. 在具有 n 个元素的有限集 A 中，存在多少个集合 A 到自身的映射？

2. A 是具有 n 个元素的有限集，B 是所有 A 的子集所组成的集. 证明 B 的势为 2^n.

3. 证明辅助命题(1)、(2)、(3).

4. 证明命题 3.

5. 找出一个一对一的映射证明单位圆周上的点与区间(0, 1)上的点等势.

6. 证明自然数集合 N 的一切有限子集组成的集合是个可数集.

7. 证明可数个可数集的并集还是个可数集.

8. 设 A 是一个无限集，B 是 A 的一个可数子集且 $A\setminus B$ 仍为无限集，则 $\overline{\overline{A\setminus B}}=\overline{\overline{A}}$.

§3　等价关系和分类

依据等价关系对集合中的元素进行分类，在数的构造理论中，有着重要的作用.

定义 8　如果在集合 S 的元素之间，定义了一种关系"～"：它使得 S 中任意两个元素 a、b，或者它们之间有着这种关系，记为 $a\sim b$，或者没有这种关系，二者必居且仅居其一，并且它还满足下列三律：

i) $a\sim a$　（自反律）；

ii) 若 $a\sim b$, 则 $b\sim a$ （对称律）;

iii) 若 $a\sim b$, $b\sim c$, 则 $a\sim c$ （传递律），

则称上述关系为 S 上的一个**等价关系**.

［例 1］ 集合 S 为平面上的三角形的全体，S 上的关系"～"定义为两三角形相似. 则对于 S 中的任何两个三角形，相似或不相似两者必居且仅居其一. 此外，容易说明这个相似关系满足等价关系三律，因此它是 S 上的一个等价关系.

［例 2］ 设 Z 为整数集, 在 Z 上定义一种同余关系如下：m、n 为任两整数，若 $m-n$ 可被 2 整除，则称 m、n 为**模 2 同余**，记为 $m\equiv n(\mathrm{mod}2)$，或 $m-n\equiv 0(\mathrm{mod}2)$. 今验证整数集上的模 2 同余关系是一个等价关系：

i) 因 $m-m=0$ 可被 2 整除, 故 $m\equiv m(\mathrm{mod}2)$.

ii) 因 $n-m=-(m-n)$，故 $n-m$ 与 $m-n$ 有同样的可除性质, 从而由 $m\equiv n(\mathrm{mod}2)$ 可推知 $n\equiv m(\mathrm{mod}2)$.

iii) 若 $m\equiv n(\mathrm{mod}2)$, $n\equiv l(\mathrm{mod}2)$，则 $m-n$、$n-l$ 均可被 2 整除，由此知 $m-l=(m-n)+(n-l)$ 亦可被 2 整除，这说明了 $n\equiv l(\mathrm{mod}2)$.

所以整数集上的模 2 同余关系是一个等价关系. 我们可以将上述定义中的 2 改为任何自然数 p, 即得整数集上**模 p 的同余关系**, 同样可以证明, 模 p 的同余关系, 是整数集上的等价关系.

［例 3］ 设 S 是由所有有理数序列 $(a_1, a_2, \cdots)$ 所组成的集. 在 S 上定义关系"～"如下：若两个有理数序列 $(a_1, a_2, \cdots)$ 和 $(b_1, b_2, \cdots)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则 $(a_1, a_2, \cdots)\sim(b_1, b_2, \cdots)$. 容易验证这样定义的关系"～"满足等价关系三律，因此它是 S 上的一个等价关系.

一个集合 S, 若在它上面定义了一个等价关系, 则它的元素就可以按彼此是否等价去进行分类：若 $a\sim b$, 则称 a、b 属于同一类,

否则就称a、b不属于同一类. 凡与a属于同一类的一切元素所成的集合称为以a为代表的等价类, 记为S_a, 于是按照等价关系三律,可知:(1) S中任一元素,必属于某一非空等价类;(2) 任意两个等价类S_a和S_b,当且仅当$a\sim b$时,有$S_a=S_b$,而且在相反情形下, 有$S_a\cap S_b=\varnothing$. 这样, 集S即可按等价关系分解成互不相交的非空子集(等价类)之和, 其中属于同一子集的任意两个元素是等价的. 反之, 把集合S表示成某些互不相交的非空子集之和的任意一种分解,都相应地在S中确定了一个等价关系:S中任意两个元素当且仅当它们属于同一个非空子集时,才是等价的. 因此,在集合S上定义一个等价关系,实际上,就是确定一种将S表示为互不相交的非空子集之和的分解法.

例如在[例2]中,整数集Z按模2同余关系进行分类,即可得两个等价类S_0、S_1. 其中S_0为偶数集, 即余数为0的集;S_1为奇数集, 即余数为1的集. 类似地整数集若按模p同余关系进行分类,则可得p个等价类,即余数分别为$0,1,\cdots,p-1$的整数所成的集合,称为**模p的同余类**. 这样, 在模p的同余关系下, 整数集即分解为p个互不相交的非空子集(模p同余类)之和.

习　题

1. 在具有n个元素的有限集中,可以定义多少种不同的等价关系?

2. 如果在集S上有两种等价关系"$\sim$"和"$\sim'$", 证明: 由"$a\sim b$"可推出"$a\sim' b$"的充分必要条件是等价关系"$\sim$"的每个等价类都是等价关系"$\sim'$"的等价类的非空子集.

§4　序

定义9　一个集合S称为是**有序**的, 假如在其元素之间定义了一种顺序关系"$\prec$",满足下述公理:

i）对于S中任意两个元素a、b，有且仅有下述三者之一：$a\prec b, b\prec a, a=b$.

ii）由$a\prec b$、$b\prec c$，可推出$a\prec c$.

在一个有序集里，若$a\prec b$，则称a在b之先，或b在a之后，亦可以记为$b\succ a$.

［例1］ 设Z是全体整数组成的集合，N是自然数集．在Z上定义顺序关系“$\prec$”如下：对于任意两整数a、b，若$b-a\in N$，则有$a\prec b$.

显然，上面定义的整数顺序，就是通常所了解的整数之间的大小顺序“$<$”．容易验证，这种大小顺序满足顺序公理.

［例2］ 设N为自然数集．对于N中任两数a、b，若有$b=a+c(c\in N)$，则定义$a<b$．按照自然数公理（见下章），知N中任两数a、b，有且仅有以下三者之一：$a=b, a=b+c, b=a+c'$，其中c、c'为自然数．因此，N中任两数a、b，有且仅有下述关系之一：$a=b, a<b, b<a$，即满足顺序公理i），同样容易证明它也满足顺序公理ii）.

上面列举的整数与自然数的顺序关系，都是通常所知的大小顺序，用同样的办法，我们可以定义有理数和实数的大小顺序（见以下各章）．但不要以为，对于数的集合，就只有大小顺序．以下两例，说明我们还可以赋予数集以其它形式的顺序.

［例3］ 设m、n为自然数集N中任意两数，则它们可以唯一地表示成形式：$n=2^p(2k+1)$，$m=2^q(2l+1)$，其中p、q、k、$l=0, 1, 2, \cdots$．我们在N上定义顺序关系“$\prec$”如下：

$n\prec m$当且仅当$p<q$；或$p=q$但$k<l$．其中“$<$”系指整数的寻常大小顺序.

读者容易验证，如上规定的自然数顺序满足顺序关系二公理．按照这个顺序，自然数的排列应当是：

$$1, 3, 5, \cdots, 2, 6, 10, \cdots, 4, 12, 20, \cdots$$

事实上，我们可以看到，对任一个自然数的序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

假若每一个自然数在这个序列中都出现一次且仅出现一次，那末它就规定了自然数集N的一个顺序关系，因此，自然数集上的顺序关系可以有无穷多个．

［例 4］ C是全体复数所组成的集合．在复数集里，并没有像实数那样的大小顺序．现在我们在C上定义一个顺序如下：设$\alpha=R'e^{i\theta'}$，$\beta=R''e^{i\theta''}$是任意两个复数，其中$0\leqslant\theta'$、$\theta''<2\pi$．规定α、β间的一个顺序$\prec$为：$\alpha\prec\beta$当且仅当$R'<R''$，或$R'=R''$但$\theta'<\theta''$．容易验证如上定义的复数间的顺序，满足顺序关系二公理．

对于复数集，我们还可以定义许多其它不同的顺序．

对一个有限集合来讲，其元素间的任何一种排列即定义了一种顺序，反过来，任何一种顺序也必确定元素的一种排列．

一个集合，不管是有限的或是无限的，我们虽然可以在它上面定义许多顺序，但并不是每一种顺序都是有意义的．因为我们现在要讨论的，是具有代数运算的集合(见下节代数系与代数运算)，因此，只有那种在代数运算下仍保持着顺序性质的顺序关系，才是有价值的．例如在［例 3］中给出的自然数的顺序下，我们任取三个自然数a、b、c，其中$a\prec b$，读者不难发现，这时$ac\prec bc$，$a+c\prec b+c$并不一定成立．又如对于复数集，就不存在像实数所具有的大小顺序．那末，什么样的集合，存在着在代数运算之下仍保持不变的顺序关系呢？这一问题，将在下面二节的讨论中得到答复．

定义 10 A、B是两个有序集，若存在A到B的映射f，使得对于A中任意两个元素$a\prec b$，都有$f(a)\prec f(b)$，则称映射f是**保序**的．若保序映射是一对一映上的，则称有序集A与B是**相似**的．

容易看出，有序集之间的相似关系，是一种等价关系.

习　　题

1. 试在有理数集上定义一个异于大小顺序的顺序关系.

2. 1°. 证明按自然数的大小顺序，任意两个无限的自然数子集都是相似的有序集.

2°. 举例说明按有理数的大小顺序，存在无限多个两两不相似的有理数无限子集.

§5　代数运算和代数系

定义 11　对于集合 A 来说，如果存在着一种法则，使得 A 中任意两个元素组成的序偶 (a, b)，必唯一地对应于 A 中的一个元素 c，则称在集合 A 内确定了一种代数运算. 一个集合，如果在它上面定义了适合某些规则的一种(或多于一种)代数运算，就称为是一个代数系.

在上述定义中，用"序偶"一词，是为了说明任何两个元素 a、b，通过代数运算所对应的元素 c，一般说来，是与 a、b 的次序有关的，即 (a, b) 与 (b, a) 作为不同的序偶，它们所对应的元素，未必是相同的.

［例 1］　有理数的集合是具有两种独立的代数运算——加法和乘法的代数系. 其它的数集合，如自然数集、整数集、实数集、复数集等，也都是具有两种独立代数运算的代数系.

不要以为只有数的集合，才具有代数运算. 近代科学技术的语言，早已将实施代数运算的对象，远远超出了数的范围. 譬如力学中的力、速度、加速度；几何学中的矢量；代数学中的多项式、矩阵；分析学中的函数、算子、…等，都是代数运算的对象.

［例 2］　集合 $A=\{a, b\}$，其中 a、b 是两个动作：a＝穿越马路，

b=原地不动．我们在A中定义两个动作间的代数运算——称为"乘法"——为连续进行两个动作，并以符号"·"表示之．于是得

$$a\cdot a=b,\quad a\cdot b=a,\quad b\cdot a=a,\quad b\cdot b=b$$

因此A构成一个二元的代数系．这个二元代数系的运算，可以通过"乘法表"来表示：

·	a	b
a	b	a
b	a	b

［例3］ 设A是整数集上模3的同余类集．因此A是由三个元素(同余类)组成的集，$A=\{S_0, S_1, S_2\}$．我们定义同余类之间的加法为：

$$S_a+S_b=S_{a+b}$$

同时我们还可以定义同余类之间的乘法为

$$S_a\cdot S_b=S_{ab}$$

根据上面定义的加、乘运算，我们可以写出A的加法表和乘法表如下：

+	s_0	s_1	s_2
s_0	s_0	s_1	s_2
s_1	s_1	s_2	s_0
s_2	s_2	s_0	s_1

·	s_0	s_1	s_2
s_0	s_0	s_0	s_0
s_1	s_0	s_1	s_2
s_2	s_0	s_2	s_1

由上例可见，对于仅具有有限元素的代数系，它的代数运算总可以通过列表给出．

在通常的代数系中，它们的代数运算——加法或乘法(*)，都须满足一定的运算规则，现将其中最常见的规则，列举如下：

	加法	乘法
(1)交换律	$a+b=b+a$	$ab=ba$
(2)结合律	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
(3)分配律	$a(b+c)=ab+ac$ $(b+c)a=ba+ca$	
(4)消去律	$a+b=a+c$ 推出 $b=c$	$ab=ac$ 推出 $b=c$
(5)零元或单位元	存在零元素0，即对于任何a，有$a+0=a$	存在单位元1，即对于任何a，有$1\cdot a=a$
(6)负元或逆元	对任何a，存在负元素$(-a)$使$a+(-a)=0$	对任何$a\neq0$，存在逆元素a^{-1}使$a^{-1}a=1$

我们平常所接触到的代数系，有的仅具有一种代数运算，有的则兼有两种代数运算．一个具体的代数系，其代数运算当然并不一定要全部满足上面所列举的运算规则．例如自然数系，对于加法不满足（5）、（6），对于乘法不满足（6）．读者不妨自行验证：对于上面[例2]中所列举的代数系，它的乘法运算满足乘法的全部运算规则；对于[例3]中列举的代数系，除去乘法运算不满足(4)、(6)以外，它满足加、乘运算的其它全部运算规则，而对于乘法运算的(4)、(6)，若在A中删去加法零元S_0，那末它也是满足的．

在加法与乘法运算满足结合律的代数系内，对于任何自然数

(*) 在一般代数系中，其"加法"与"乘法"，与平常大家所熟悉的数的加法与乘法，是完全不同的，但为了方便起见，我们对于一般代数系的运算，仍采用"加法"与"乘法"的名称，并且仍然沿用"+"和"·"作为运算符号．这方面的区别，希读者不要混淆．

n，我们可以定义

$$na=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}}$$

$$a^n=\underbrace{aa\cdots a}_{n\text{个}}$$

在以后讨论中，代数系若不特别指明，恒设其满足运算规则(1)、(2)、(3)．

在一个定义了加法运算的代数系内，若对于任意两个元素 a、b，方程 $a+x=b$ 恒有唯一解，则称此解 x 为元素 b 与 a 之差，记为 $b-a$．这种由 a、b 确定出 $b-a$ 的运算，称为减法运算，它是加法运算的逆运算．凡具有减法运算的代数系，必有零元素 0，$0=a-a$．方程 $a+x=0$ 的解，称为 a 的负元，常记为 $(-a)$，显然我们有 $b-a=b+(-a)$．

在一个定义了乘法运算的代数系内，假如对于任意两个元素 a、b（假如代数系同时有加法运算的话，则 a 不为加法零元素），方程 $ax=b$ 恒有唯一解，则称其解 x 为 b 与 a 之商，记为 b/a．这种由 a、b 确定其商 b/a 的运算，称为除法运算，它是乘法的逆运算．凡具有除法运算的代数系，必具有单位元素 1，$1=a/a(a\neq 0)$．方程 $ax=1$ 的解，称为 a 的逆元，记为 a^{-1} 或 $1/a$，显然我们有 $b/a=b(a^{-1})$．

并不是具有加法、乘法运算的代数系，必具有逆运算，例如自然数系，是具有加、乘两种运算的代数系，但是在自然数系内，对任何两数 a、b，方程 $a+x=b$ 和 $ax=b$ 并不总是有解的．因此对这两种运算它都不可能有逆运算．像自然数系的这种情况：即不能自由地在任意两元素之间，施行减法或除法，我们就说，自然数系对于减法或除法，是不封闭的．同样地，我们可以看到，对于整数系来说，方程 $a+x=b$ 恒有解，因此它具有加法的逆运算，而方程

$ax=b$ 却并不总有解，因此对乘法就无逆运算．所以整数系对于减法来说，是封闭的，而对于除法却是不封闭的．

在仅具有一种代数运算的代数系中，最重要的是群和半群，它们无论在理论和实际的问题中，都有很重要的应用．

定义 12 具有一种代数运算的代数系，假如这一运算满足结合律，并且具有逆运算，则称此代数系为群．若这一运算同时又满足交换律，则称为交换群或阿贝尔(Abel)群．若具有逆运算的条件不成立，则此代数系就称为半群．

因此，对于加法群来讲，方程 $a+x=b$ 恒有解；对于乘法群来讲，方程 $ax=b$ 恒有解．

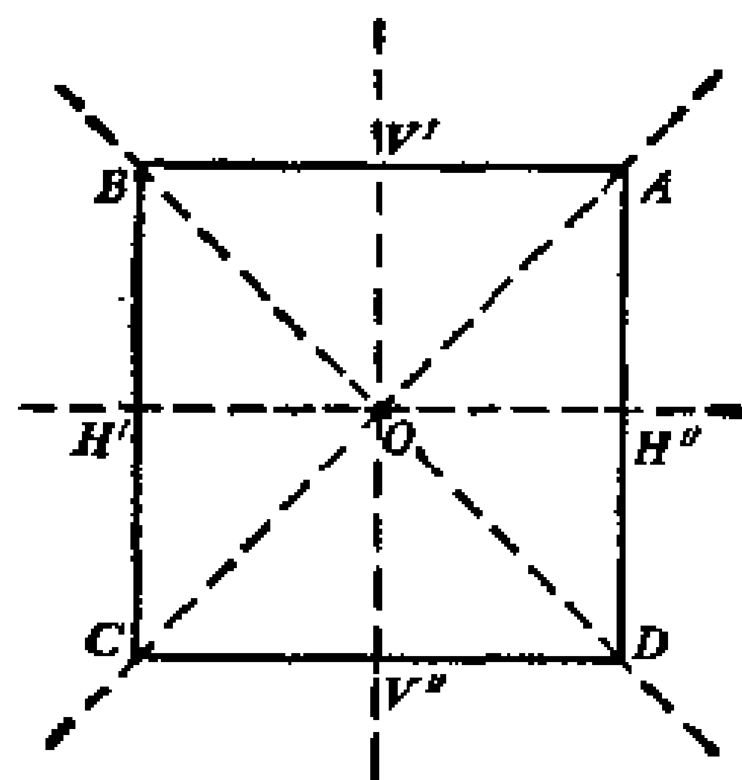
［例 4］ 自然数系对于加法和乘法都构成半群；

整数系对于加法构成群；对于乘法构成半群；

分数系(正有理数集)对于加法构成半群；对于乘法构成群；

有理数系对于加法构成群；其非零数对于乘法亦构成群．

上述群均为交换群．



［例 5］ $ABCD$(右图)为一正方板，O 为其中心．集合 $G=\{R_0, R_1, R_2, R_3, H, V, D, D'\}$是由 8 个绕固定点 O 的刚体运动组成，其中 R_0、R_1、R_2、R_3 分别表示绕 O 点沿顺时针方向作 0°、90°、180°、270° 的旋转；H、V 分别表示以水平轴 $H'H''$ 和垂直轴 $V'V''$为轴各作 180° 的旋转；D、D' 分别表示以对角线 AC 和 BD 为轴各作 180° 的旋转．

我们在 G 上定义两个元素的“乘法”运算为连续施行两种运动．如 $R_1R_2=R_3$(先施行 R_2 再施行 R_1，后同)，$HV=R_2$，$R_1H=D$，$HR_1=D'$ 等．

读者不难自行验证 G 在上述"乘法"运算下是封闭的，即 G 中任何两个运动的"积"，仍为 G 中的一个运动. 显然 R_0 是 G 中的单位元，任何运动都有逆元，如 $H^{-1}=H$，$V^{-1}=V$，$D^{-1}=D$，$D'^{-1}=D'$. $R_1^{-1}=R_3$，$R_2^{-1}=R_2$ 等. 因此 G 是一个群，由 $R_1H=D\neq HR_1$ 可看出，这个群不是交换群.

在同时具有两种运算的代数系中，最重要的是环和域.

定义 13 设代数系 A 具有两种代数运算——加法和乘法，若对于加法，它为一交换群，对于乘法，为一半群，并且对于加法和乘法，满足分配律，则称 A 为环. 一个环，若其所有非零元素对乘法构成交换群，则称为域.

由以上定义知，域是一个对于加、乘及它们的逆运算减、除（除去零元素）均为封闭的代数系，这是一种最为重要的代数系. 在数系的范围内，整数系、分数系均是环，而有理数系、实数系、复数系均为域.

［**例 6**］ Z_p 是整数环的模 p 同余类集. 若 a、b 为任两整数，以 $\bar{a}$、$\bar{b}$ 分别表示以 a、b 为代表的模 p 同余类. 我们在 Z_p 上定义加法与乘法如下：

$$\bar{a}+\bar{b}\equiv\overline{a+b}$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}\equiv\overline{ab}$$

需要证明如上定义的运算所得到的元素是唯一的，并不因代表元素 a、b 选择的不同而异. 事实上，我们任取 $a'\equiv a(\bmod p)$，$b'\equiv b(\bmod p)$，则因

$$(a'+b')-(a+b)=(a'-a)+(b'-b)$$

等式右端可为 p 整除，故知 $(a'+b')\equiv(a+b)(\bmod p)$，从而得 $\overline{a'}+\overline{b'}=\overline{a+b}$. 同理，由于

$$a'b'-ab=a'b'-a'b+a'b-ab=a'(b'-b)+b(a'-a)$$

等式右端可为 p 整除，故知 $a'b'\equiv ab(\bmod p)$，从而得 $\overline{a'b'}=\overline{ab}$.

因此，同余类的运算，完全通过它们代表元素的运算来确定，不因其代表元的选择而异．由此可推知，同余类集 Z_p 的代数运算，必具有整数环运算同样的性质，因此 Z_p 也是一个环．

现在我们来证明，当 p 为一素数时，Z_p 为一域．即需要证明，对于任何 $\bar{a}$、$\bar{b}\in Z_p$，当 $\bar{a}\neq\bar{0}$ 时，方程 $\bar{a}\bar{x}=\bar{b}$ 有唯一解．因为 Z_p 只有 p 个元素：$\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{(p-1)}$，将它们同乘以 $\bar{a}$，得 p 个元素：$\bar{a}\bar{0}$，$\bar{a}\bar{1},\cdots,\bar{a}\overline{(p-1)}$．这些元素，如果都不等于 $\bar{b}$，则它们中必至少有两个元素相等，不妨设 $\bar{a}\bar{h}=\bar{a}\bar{k}$（其中 $h<k$），于是由 $ah\equiv ak(\mathrm{mod}\,p)$，知 $a(k-h)$ 可被 p 整除，根据 p 为素数的假设，知 p 必可整除 a 或 $k-h$，而因 $\bar{a}\neq\bar{0}$，$0<k-h<p$，故知这是不可能的．因此一定存在 $\bar{x}\in Z_p$，使得 $\bar{a}\bar{x}=\bar{b}$．同理可证明这样的 $\bar{x}$ 是唯一的．于是证明了 Z_p 是一个域．

［**例 7**］ 设 Q 为有理数域．记 $Q(\sqrt{2})$ 为所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数组成的集合，其中 a、b 为 Q 中任意有理数．设 $\alpha=a+b\sqrt{2}$，$\beta=c+d\sqrt{2}$ 为 $Q(\sqrt{2})$ 中任意两个数，定义它们间的加法与乘法如下：

$$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$
$$\alpha\beta=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

容易验证上述定义的运算都满足交换、结合、分配三律，对于加法，可得零元素为 $0+0\sqrt{2}$，对于乘法，可得单位元素为 $1+0\sqrt{2}$．对任一非零元素 $\alpha=a+b\sqrt{2}$，可求出它的逆元素为 $\alpha^{-1}=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$．因此 $Q(\sqrt{2})$ 是一个域．

习　题

1．证明模 6 同余环 Z_6 不能有除法．

2．写出模 5 同余环 Z_5 的加法表与乘法表．

3．在一个域里面证明 $(-a)(-b)=ab$．

4. 在[例5]的正方形运动群中，计算元素 VD, DR_2, $R_2(HR_1)$, $(R_2H)R_1$.

5. 设 F 为一域，a、b、c 为 F 的任意元素，$c\neq0$，证明等式：

$$1^\circ \quad \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

$$2^\circ \quad (a-b)c=ac-bc$$

6. K 是所有有理数偶 (a_1, a_2) 所组成的集合，在 K 上定义加法与乘法如下：

$$(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)$$
$$(a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2)=(a_2b_1+a_1b_2, a_2b_2-a_1b_1)$$

试问：K 是一个环？一个域？

7. 上题中，若乘法定义改成

$$(a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2)=(a_1b_1, a_1b_2+a_2b_1)$$

证明 K 是一个以 $(1, 0)$ 为单位元素的环.

8. 若 a 为整数，p 为素数，证明 $a^p\equiv a(\bmod p)$.

9. 证明方程 $x^2\equiv35(\bmod 100)$ 无解.

§6 序 环(域)

定义 14 一环(或域) F 称为是可序的，假如存在它的一个真子集 P，称为 F 的正元素集，满足以下性质：

i) 对于任一 $a\in F$，下列三者居且仅居其一：

$$a\in P, \quad a=0, \quad -a\in P;$$

ii) 若 $a\in P$, $b\in P$, 则 $a+b\in P$;

iii) 若 $a\in P$, $b\in P$, 则 $ab\in P$.

命题 4 F 为一可序域，P 为其正元素集，则对于任意非零元素 $a\in F$，必有 $a^2\in P$，特别地 F 的单位元 $1\in P$.

证明 设 $a\neq0$，则由上述定义所述性质 i)，有 $a\in P$ 或者 $-a\in P$. 在前一情形，根据性质 iii)，有 $a^2=aa\in P$；在后一情形，有 $a^2=(-a)^2=(-a)(-a)\in P$(*). 故在任何情形下，$a^2\in P$ 成立. 特

(*) 关于 $(-a)(-b)=ab$ 见上节的习题.

别地 $1=1^2\in P$. 命题证毕.

在可序环(域)中，我们可以得到一种在加法和乘法运算下保持不变的顺序关系(大小关系).

设 F 为一可序环(域)，P 为其正元素集. 则我们在 F 上定义顺序关系如下：对于 F 中任意两元素 a、b, 若 $b-a\in P$，则称 a 小于 b, 记为 $a<b$, 或称 b 大于 a, 记为 $b>a$.

我们证明如上定义的关系"$<$"满足顺序公理. 首先，由定义 14 的性质 i), 知对于元素 $b-a$, 下列三者居且仅居其一: $b-a\in P$; $b-a=0$; $-(b-a)=a-b\in P$. 于是按"$<$"的定义可知: $a<b$; $a=b$; $b<a$ 三者也必居且仅居其一，因此关系"$<$"满足顺序公理 i). 其次设 $a<b$ 和 $b<c$, 即 $b-a\in P$ 和 $c-b\in P$，于是由定义 14 的性质 ii), 可得 $c-a=(c-b)+(b-a)\in P$, 即 $a<c$, 故顺序公理 ii)也满足. 因此关系"$<$"定义了可序环(域) F 上的一个顺序.

对于任一个 F 的正元素 a, 由 $a-0=a\in P$，推知 $a>0$；反之，对任一 F 中元素 $a>0$, 可有 $a=a-0\in P$，故 a 为正元素. 因此，a 为 F 的正元素的充分而必要条件是 $a>0$，即正元素乃是大于 0 的元素. 另一方面，由 $a>0$，根据定义 14 性质 ii)，$0+a\in P$ 即 $0-(-a)\in P$, 可推知 $-a<0$. 故知任何正元素的加法逆元必是小于0的元素，通常称之为负元素.

因此，可序环(域)又称为有序环(域)，且正元素就是大于 0 的元素.

命题 5 设 F 为有序环(域)，"$<$"是 F 上用正元素集 P 所规定的顺序，a、b、c 为 F 上任意元素，则有：

1. 若 $a<b$, 则 $a+c<b+c$;
2. 若 $a<b$, $0<c$, 则 $ac<bc$;
3. 若 $a<b$, $c<0$, 则 $ac>bc$.

证明留给读者.

定义 15　设F为有序环（域），F的任一元素a的**绝对值**$|a|$规定为：

$$|a|=\begin{cases} a, & 当\ a>0 \\ 0, & 当\ a=0 \\ -a, & 当\ a<0 \end{cases}$$

按定义，可证明下列等式及不等式：

1. $|ab|=|a||b|$
2. $|a+b|\leqslant|a|+|b|$
3. $||a|-|b||\leqslant|a-b|$

习　题

1. 证明：在有序域内，若$a<b$则$a^3<b^3$.

2. 证明：在有序域内，若$a^3=b^3$必可推出$a=b$.

3. 在上节习题7所定义的环K上，定义一个顺序如下：

$(a_1,a_2)<(b_1,b_2)$当且仅当$a_1<b_1$，或$a_1=b_1$但$a_2<b_2$. 证明：1°. 若$0\leqslant(a_1,a_2)$和$0\leqslant(b_1,b_2)$，则有$0\leqslant(a_1,a_2)+(b_1,b_2)$，$0\leqslant(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)$，其中0是$K$中的加法零元$(0,0)$.

2°. K不满足阿基米得公理(*)；

3°. K不是一个有序环.

4. 证明复数域不是一个有序域.

5. 设K是由至多有有限个不等于0的有理数a_n为项的有理数序列$a=(a_n)$的全体组成的集合. 对K中任意两个元素$a=(a_n)$和$b=(b_n)$按以下规则定义加法、乘法和顺序：

$$a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n,\cdots)$$

$$a\cdot b=(a_1b_1,a_1b_2+a_2b_1,\cdots,a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1,\cdots)$$

$a<b$：如果对自然数子集$\{n|a_n\neq b_n\}$中的最小数n_0，有$a_{n_0}<b_{n_0}$.

证明：K在如上定义的加法、乘法和顺序下是一个不满足阿基米得公理(*)的有序环.

(*) 一个有序环，若对于它的任两个元素$b>a>0$，必存在自然数n，使$na>b$，则此有序环就称为是满足阿基米得公理的.

§7 同构与扩张

环的一个子集，若对于加、减、乘运算封闭，则仍为一个环，称为该环的子环. 同样，一个域的子集，若仍为一域，就称为该域的子域.

定义 16 A、B是两个各具有加、乘运算的代数系，若存在A到B上的一个一对一的映射f，使得对于A中任意两个元素a、b，都满足条件：

i) $f(a+b)=f(a)+f(b)$

ii) $f(ab)=f(a)f(b)$

则称代数系A、B是同构的，此时f称为A、B间的一个同构映射. 若A、B同时又是有序集合，并且A、B间的同构映射f还满足条件

iii) 若$a\prec b$，则$f(a)\prec f(b)$

则称A和B是序同构的.

上面的定义，对于A、B仅有一种代数运算的情形，仍然适用. 从代数学的观点来看，两个代数系若同构，则它们就具有同样的代数性质，意即：一种运算性质为甲系所有，则通过同构映射，可知亦必为乙系所有，反过来也对. 因此两个同构的代数系，除了元素的表示形式不同之外，其代数构造完全相同. 所以从代数的观点去看，同构的代数系并没有什么区别.

有了同构这个概念，我们就可以进一步定义代数系的扩张.

定义 17 两个代数系A、B，若A与B的一个子集同构，则称B是A的一个扩张.

上述定义告诉我们，所谓代数系的扩张，并不是形式上在旧的代数系上面添加新的元素，而是在旧的代数系之外去构造一个新的代数系，这个新代数系，其元素在形式上与旧的可以完全不同，

但是它包含一个与旧代数系同构的子集，因而从代数上来看，它是旧代数系的扩张. 这也就是我们在下一章将自然数系扩张成为有理数系的途径与方法，它也是我们在最后二章中将有理数系扩张成为实数系的途径和方法.

习　题

1. 设 $A=\{I, R, S, T\}$，其中 I、R、S、T 分别表示绕固定轴沿顺时针方向作 0°、90°、180°、270°的旋转，两个旋转的乘积定义为连续施行这两次旋转. 证明集 A 对上述乘法构成群，并且与作为加法群的 Z_4 同构.

2. 证明代数系的同构是一种等价关系.

3. 证明域 $Q(\sqrt{2})$（见第一章 § 5[例 7]）是有理数域 Q 的扩张.

4. 证明任何无限域都是有理数域的扩张.

5. 证明仅具有 3 个元素的域必与 Z_3 同构. 一个仅具有 p 个元素的环是否与 Z_p 同构？

6. 证明在域 $Q(\sqrt{2})$ 与 $Q(\sqrt{3})$（$Q(\sqrt{3})$ 的定义与 $Q(\sqrt{2})$ 同理）之间不可能存在同构映射.

7. 环 Z_p 什么时候有子环？有几个子环？（以 $p=6$ 为例）.

8. $Q(\sqrt[3]{2})$ 表示有理数域的包含无理数 $\sqrt[3]{2}$ 的最小扩张域，写出 $Q(\sqrt[3]{2})$ 中数的一般表示形式.

第二章　从自然数到有理数的扩张

§1　奠定数系逻辑基础的意义

自然数 1, 2, 3, …是人类最先认识的数系. 世界上不同地区的许多民族，在历史上，都各自独立地用自己的文字来表示自然数. 随着生产的发展和人类社会的进步，人类又在认识自然数的基础上，进一步掌握了分数、负数、实数、复数等，使得数的语言扩展到了更广的范围. 然而，也许这些随时都在使用着的数，对于人们来说是太基本了，因此在十九世纪以前的漫长历史中，没有人感觉到有需要给它们以严格的定义.

但是数学的深入发展，却愈来愈迫切地要求自己有一个坚实的逻辑基础. 数学分析经过了十七、十八两个世纪的蓬勃发展以后，到了十九世纪，由于本身逻辑基础不严密，在前进中已日益觉得步履艰难. 前两个世纪沿袭下来的那种凭着几何直觉和物理印象来进行的粗略推证方法，已经愈来愈显得不适应于数学分析进一步发展的步伐. 在分析学里，波尔查诺、维尔斯特拉斯、黎曼(B. Riemann)等人，先后举出了处处连续而不可微函数的例子，此外，又如用三角函数级数表示不连续函数等事例的出现，这些都深深地震动了数学界，它们有力地说明了，直观并不总是可靠的，分析学不能把自己的理论系统建筑在不可靠的直觉臆想上，而必须建立在严密的逻辑基础上.

数学分析理论的奠基工作，经过了十九世纪不少数学家的努力，取得了很大的成功. 这一点，我们在本书绪论中，已经提及了.

数学分析的奠基，必然要求建立严格的实数理论.这是显然的，因为没有无理数的严格定义，没有实数的完备性质，就不可能有严格的极限理论，从而也不可能推导出连续函数那些重要的性质以及关于导数、积分的一系列基本性质. 十九世纪下半叶，不少数学家从事于无理数的理论及实数完备性的研究，并最后完成了完备实数域的构造. 这方面主要以梅莱、康托尔、海涅(E. Heine)、戴德金等人的工作为标志. 特别是康托尔和戴德金的实数构造理论，为人们所熟悉. 这部分内容，我们将在本书下两章作较详细的介绍.

因为无理数，是以有理数为出发点构造出来的，因此要严格定义无理数，就必须严格定义有理数. 而有理数又是什么呢？有理数是以自然数为出发点构造出来的，因此为了定义有理数，就追溯到必须严格定义自然数. 这样看来，自然数作为其它数系逻辑上的出发点，也就成了整个数学分析大厦的基石.

但是，自然数对于人们来说，是太基本与太熟悉了，对于这样一个不言而喻的对象，难道还需要作什么"定义"吗？德国数学家克隆尼克（L. Kroneker）就曾说过："整数是上帝给的，其它一切都是人造的". 当时即使像维尔斯特拉斯那样思想严密的数学家，也未曾考虑到要对所谓造物主给的这一堆数，给予严格的定义.

然而严密化的历史潮流，并没有给自然数以"豁免权". 事实上，愈是最基本的、熟悉的对象，就愈应该加以严密的规定. 当然，自然数的定义，与其它数系(如有理数、实数)的定义方法，是不同的. 由于自然数是数系的出发点，因而不可能再存在其它更为基本的数学对象，使得自然数是它们演绎或构造的结果. 因此，像自然数这样最基本的数学对象，只能用自然数自身的性质去规定它. 那末在数学上，我们应当说些什么，才是它们本质的、完全的描述呢？这就是自然数公理.

所谓自然数公理,简言之,就是自然数在逻辑上的最高度的和最简练的概括,它由自然数的一组最少个数的独立性质所组成,同时使得自然数的一切其它性质,均蕴含于它们之中,即都可以由它们演绎而得.

自然数公理是在1889年由意大利数学家皮亚诺(G. Peano)所完成的,常称为皮亚诺公理. 但这组极其简练的公理,其语言形式,常不易为初学者所接受,因此在本书,我们将代之以另一组与皮亚诺公理等价的公理,并将它作为下面构造有理数域的逻辑出发点. 皮亚诺公理,则附在其后,以资介绍. 所谓等价,是指从皮亚诺公理出发,可以推导出在下一节列出的公理中所包含的全部性质;反过来,从下一节列出的公理出发,也可以推导出皮亚诺公理包含的全部性质.

§2 自然数公理

自然数公理

自然数集$N=\{1, 2, \cdots\}$是具有下述性质的集合:

i) 在N上可唯一地确定两种独立的代数运算——加法和乘法,满足交换、结合、分配三律.

ii) 1是乘法的单位元,即对于任何$n\in N$,有$1\cdot n=n$.

iii) 乘法满足消去律,即由$ma=na$可推出$m=n$.

iv) 对N内任意两个数m、n,有且仅有下述三者之一:$m=n$;$m+x=n$有一解$x\in N$;$n+y=m$有一解$y\in N$.

v) 有限归纳原理:S为N的子集,如果它满足:(a) S包含1,(b) S若包含自然数n则必包含$n+1$,则$S=N$.

公理中的性质i)、ii)、iii)确定了自然数系作为代数系的性质. 性质iv)则说明了N是一个可序集. 事实上,对于任意两个自然数m、n,若有$x\in N$,使$m+x=n$,则规定$m<n$(或$n>m$). 显

然，根据公理的性质 i)和 iv)，可以证明这样规定的"$<$"满足顺序公理，从而它是N上的一个顺序，这正是第一章 § 4[例 2]所证明的(注意这时N的正元素集，就是N自己)．性质v) 则提出了自然数区别于其它数系的离散特性，它也是我们常用的数学归纳法的依据.

从性质 v) 出发，我们可证明下述命题，即自然数的良序性，它是第二数学归纳法的依据.

命题 1 (最小数原理) 自然数集N的任何非空子集S必有最小数．即存在数$a\in S$，使得对于S中的任何其它自然数b，都有$a<b$.

证明 首先我们证明 1 是N中的最小数．如若不然，则存在$a\in N$，满足$a<1$．令N的子集$T=\{x|x\in N, x>a\}$，则知$1\in T$．假设自然数$n\in T$，则显然有$n+1\in T$．于是根据自然数公理性质 v)，可推出$T=N$．但$a\overline{\in} T$，所以又有$T\neq N$．这个矛盾说明了 1 必须是N中的最小数.

今考虑集S．若S包含 1，则 1 即为S的最小数，命题已真．下面假设S不包含 1．再用反证法，设S没有最小数．令M是N这样的一个子集，它是N中所有小于S中的任何自然数的集，即$M=\{x|x\in N, x<b, b\in S\}$．于是由假设，$1\in M$．今设$m$为$M$中的任一自然数，我们证明$m+1\in M$．令$b$是$S$中的一个自然数，由$m<b$，知存在自然数$x$，使$m+x=b$，这里$x$不可能等于 1，因为若$x=1$，则$b$就是$S$中的最小数，与假设矛盾，所以$x>1$．由性质 iv) 存在自然数$y$使得$x=1+y$，于是得$m+1+y=b$，这就推出$m+1<b$，由于$b$是$S$中的任意数，所以$m+1\in M$．根据性质 v)，即得$M=N$，故$S=\varnothing$，这当然是不可能的，所以$S$必有最小数，命题证毕.

命题 2 (阿基米得公理) 若a、b为任两个自然数，$a<b$，则

必有自然数 n，使得 $na>b$.

证明留给读者.

附

皮亚诺公理 自然数集 N 是满足下述一组公理的集合

i) 1 是一个自然数;

ii) 对于 N 中每一个自然数 n，都可以在 N 中找到一个确定的后继数 n^+;

iii) 对任何自然数 n，$n^+\neq 1$. 即没有以 1 为后继数的自然数;

iv) 任何两个自然数 m、n，若 $m^+=n^+$，则 $m=n$;

v) N 的任一子集 S 若满足性质：(a) $1\in S$，(b) 由 $n\in S$ 可推出 $n^+\in S$，则 $S=N$.

皮亚诺公理与上面所述自然数公理是等价的. 事实上，从皮亚诺公理出发，可以在自然数集 N 中唯一地定义加法与乘法运算如下：

加法
$$n+1=n^+$$
$$n+m^+=(n+m)^+$$

乘法
$$n\cdot 1=n$$
$$n\cdot m^+=n\cdot m+n$$

从这样定义的加法与乘法出发，即可推出前面所列自然数公理的五条性质. 反过来，从前面所列自然数公理的五条基本性质出发，定义任一自然数 n 的后继数 n^+ 为

$$n^+=n+1$$

也可以推出皮亚诺公理的五条. 这方面的内容，因为并非本书主旨，我们就不在此详述了. 有兴趣的读者可参阅[1].

习 题

1. 试从命题 1 出发证明第二数学归纳法：$T(n)$ 是与自然数 n 有关的命

题，若满足 1°．$T(1)$成立，2°．由 $T(n)$对一切小于 k 的自然数成立可推出 $T(k)$成立，则 $T(n)$对所有自然数皆成立．

2．试从本节所列自然数公理出发推导出皮亚诺公理．

3．对自然数证明加法消去律：若 $a+c=b+c$，则 $a=b$．

§3　整数环的构造

本节将从自然数系出发，来构造整数环，也就是将自然数系扩张成整数系．下节将从整数环出发，构造有理数域，从而完成从自然数到有理数域的扩张．

令 $D=\{(a,b)\mid a、b\in N\}$，它是由所有自然数偶组成的集合．在 D 上定义等价关系"$\equiv$"如下：

$$(a,b)\equiv(c,d)^{(*)}\quad 意即\quad b+c=a+d$$

可证上述定义的关系"$\equiv$"满足等价关系三律．三律中的 i)、ii) 是显然的，今证 iii)．设$(a,b)\equiv(c,d)$，$(c,d)\equiv(e,f)$，则由定义知有 $a+d=b+c$，$c+f=d+e$．将等式两端相加并运用加法消去律（见上节习题 3），即得 $a+f=b+e$，从而证明了$(a,b)\equiv(e,f)$．

下面以$\overline{(a,b)}$表示(a,b)所属的等价类．显然，当且仅当 $a+d=b+c$ 时，$\overline{(a,b)}=\overline{(c,d)}$．

我们称$\overline{(a,b)}$为**整数**，令 Z 表示一切整数所成之集．在 Z 上定义加法与乘法运算如下：

$$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)}$$

$$\overline{(a,b)}\,\overline{(c,d)}=\overline{(ad+bc,bd+ac)}$$

为了说明如上规定的加、乘确实定义了整数集 Z 上的两种代

(*)　直观上看，D 中的元素(a,b)事实上是指 $b-a$．等价关系$(5,3)\equiv(8,6)$实际上就是 $3-5=6-8$．由于自然数中没有普遍的减法，而负数正是我们要定义的对象，因此不能用 $b-a$ 这个尚无意义的符号来表示欲构造的整数．采用自然数偶(a,b)来表示欲定义的整数，是一种逻辑上严格叙述的手法．在下一节有理数的构造中，我们仍要采用这一办法．

数运算，我们需要指出如上定义的运算与代表元的选择无关．即如果$(a',b')\equiv(a,b)$，$(c',d')\equiv(c,d)$，则必有

$$(a'+c',b'+d')\equiv(a+c,b+d)$$

$$(a'd'+b'c',b'd'+a'c')\equiv(ad+bc,bd+ac)$$

这部分的证明留给读者．

因为自然数的加、乘运算满足结合、交换、分配三律，因此容易验证，整数集上所定义的加、乘运算亦满足上述三律．

由于$\overline{(a,a)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,a+d)}=\overline{(c,d)}$，故知加法有零元素$\overline{(a,a)}$，记零元素为 0．

由于$\overline{(b,a)}+\overline{(a,b)}=\overline{(a+b,a+b)}=0$，故知$\overline{(a,b)}$对于加法有逆元素$\overline{(b,a)}$．这说明整数集 Z 对于加法组成一交换群，因此 Z 是一个环．

我们在 Z 中定义正整数集 P 如下：$P=\{\overline{(a,b)}\mid b>a\}$，不难验证，正整数集 P 满足第一章定义 14 中正元素集的三条性质，因此 Z 是一个可序环．根据 Z 的正元素集，我们同时也就可确定它的大小顺序"$<$"：所谓$\overline{(a,b)}<\overline{(c,d)}$，当且仅当 $b+c<a+d$．

我们把正整数的加法逆元称为负整数，于是整数环就可以划分为正整数，0 和负整数三部分．按照上面所定义的大小顺序，正整数是所有大于 0 的整数，负整数是所有小于 0 的整数．一个整数$\overline{(a,b)}$是负整数的充分必要条件是 $b<a$．

现在我们将一切正整数表示为$\overline{(1,1+c)}$，令 f 为映正整数集 P 到自然数集 N 上的映射：

$$f:\ \overline{(1,1+c)}\longrightarrow c$$

容易验证，它是一个保序的同构映射．因此，正整数集 P 和自然数集 N 是序同构的代数系．这就说明了整数环是自然数系的一个扩张．因此，我们对正整数和自然数可以不作任何区别，若 n 表示自然数，则它亦表示正整数，同时 $-n$ 则表示负整数．

习　题

1. 证明整数加、乘运算的定义与代表元的选择无关.
2. 试从自然数系出发构造分数系(正有理数集).

§4　整数环到有理数域的扩张

仍以 Z 表示整数环. 考虑集合 $E=\{(a,b)\,|\,a,b\in Z, a\neq 0\}$, 它是由一切满足 $a\neq 0$ 的整数偶 (a,b) 所组成. 在 E 上定义等价关系"$\equiv$"如下

$$(a,b)\equiv(c,d)\ \text{意即}\ ad=bc$$

如上定义的关系"$\equiv$"满足等价关系三律, 其中的 i)、ii) 是显然的. 今证 iii): 由 $(a,b)\equiv(c,d)$ 和 $(c,d)\equiv(e,f)$, 根根"$\equiv$"的定义, 有 $ad=bc$ 和 $cf=de$. 前式乘 e 得 $ade=bce$, 又由 $de=cf$, 便得 $acf=bce$, 于是由 $c\neq 0$ 并应用消去律(*), 即得 $af=be$, 从而按定义, 即得 $(a,b)\equiv(e,f)$. 这就证明了关系"$\equiv$"是等价关系.

今以 b/a 表示 (a,b) 所属的等价类, 称为**有理数**, 其中 b 称为**分子**, a 称为**分母**. 显然当且仅当 $ad=bc$ 时, 才有 $b/a=d/c$.

以 Q 表示所有有理数组成的集合, 称为有理数集. 我们在 Q 上定义加法和乘法如下:

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{bd}{ac}$$

需要证明, 上述运算与代表元的选择无关. 设 $\frac{b'}{a'}=\frac{b}{a}, \frac{d'}{c'}=\frac{d}{c}$, 经过适当运算, 可得出

$$ac(b'c'+a'd')=a'c'(bc+ad),\ acb'd'=a'c'bd$$

(*) 整数对乘法满足消去律, 是因为自然数对乘法满足消去律.

于是有 $$\frac{b'c'+a'd'}{a'c'}=\frac{bc+ad}{ac},\ \frac{b'd'}{a'c'}=\frac{bd}{ac}$$

即 $$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{b'}{a'}+\frac{d'}{c'},\ \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{c}\right)=\left(\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{d'}{c'}\right)$$

这说明如上定义的加、乘是Q上的代数运算.

因为整数的加、乘运算满足交换、结合、分配三律，由此不难验证有理数的加、乘运算也满足运算的这三条规律.

由于$\frac{0}{a}+\frac{d}{c}=\frac{ad}{ac}=\frac{d}{c}$，因此$\frac{0}{a}$是有理数中的加法零元. 同时因$\frac{b}{a}+\frac{-b}{a}=\frac{ab+(-ab)}{aa}=\frac{0}{aa}$，故知$\frac{-b}{a}$是$\frac{b}{a}$的负元. 于是知有理数集关于加法组成一交换群.

同时，因$\left(\frac{a}{a}\right)\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{ad}{ac}=\frac{d}{c}$，故知$\frac{a}{a}$是$Q$中的乘法单位元. 又因当$b\neq 0$时$\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{ab}{ab}=\frac{a}{a}$，故知$\frac{a}{b}$是$\frac{b}{a}$的乘法逆元，这就说明了$Q$中一切非零元素关于乘法组成一交换群，因此有理数集$Q$对于上述的加、乘运算组成一个域.

现在来建立有理数域的顺序. 我们定义正有理数集$P=\left\{\frac{b}{a}\,\middle|\, ab \text{ 为正整数}\right\}$. 今验证它满足正元素集的三条性质(见第一章定义14)：i) 若$b=0$，则$\frac{b}{a}$为零元；若$b\neq 0$，则或$ab>0$，或$ab<0$，在前一情形，$\frac{b}{a}\in P$，在后一情形，$-ab=a(-b)>0$，从而得$\frac{-b}{a}=-\left(\frac{b}{a}\right)\in P$. ii) 若$\frac{b}{a}$、$\frac{d}{c}$为正有理数，则$ab>0, cd>0$，据第一章 § 6 命题 4，可知$c^2>0, a^2>0$，于是可得$ac(bc+ad)=abc^2+a^2cd>0$，这就说明了$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}\in P$. iii) 在上面假定下，可得$(ab)(cd)=(ac)(bd)>0$，这就说明$\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{bd}{ac}\in P$.

于是有理数域 Q 为一可序域．根据正元素集，即可确定 Q 的顺序：当 $\frac{b}{a}-\frac{d}{c}$ 为一正有理数时，$\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$．由此即可推知 $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$ 的充分必要条件是 $bc>ad$．

现在考虑有理数域的子集 $Z'=\left\{\frac{b}{1}\middle| b\text{ 整数}\right\}$，并定义由 Z' 到整数集 Z 上的映射 f：$\frac{b}{1}\to b$．这是一个 Z' 到 Z 上的保序同构映射，因此 Z 与 Q 的一个子集同构，这就说明了有理数域是整数环的一个扩张．

作为一个有序域，在有理数域上同样可以按上一章定义 15 来定义有理数的绝对值，满足第一章 § 6 末尾的绝对值的那些等式和不等式．

对于有理数域，我们还可以证明它的两个重要性质．

命题 3 (1)α、β 为任两个有理数，$\alpha<\beta$，则必存在有理数 γ 满足 $\alpha<\gamma<\beta$．

(2)α、β 为任两个正有理数，$\alpha<\beta$，则必存在自然数 n，使 $n\alpha>\beta$．

证明 (1)令 $\alpha=\frac{b}{a}$，$\beta=\frac{d}{c}$，取 $\gamma=\frac{bc+ad}{2ac}$，即得 $\alpha<\gamma<\beta$．

(2)同样令 $\alpha=\frac{b}{a}$，$\beta=\frac{d}{c}$．由于正整数集满足阿基米得公理，故知对于正整数 bc，ad，必存在自然数 n 使 $nbc>ad$，这就证明了 $\frac{nb}{a}>\frac{d}{c}$，即 $n\alpha>\beta$．证毕．

上述命题说明有理数集是一个稠密集，并且满足阿基米得公理．因此有理数域是一个稠密的、满足阿基米得公理的有序域．

习　题

1．试从有理数域出发，仿照本节用整数构造有理数的方法、或者上节用

自然数构造整数的方法，构造出新的数域，证明它们都与有理数域自身同构.

§5 关于有理数域的缺陷

迄今为止，我们已经从自然数系出发，构造了有理数域，这是一个对加减乘除四则运算封闭的、稠密的阿基米得有序域. 假如仅从有限的算术运算的角度来看问题，这已经是一个完美的数系了. 但是若进一步从变量数学的角度来考察问题的话，则它还存在着本质上的缺陷. 下面我们从两个方面来谈谈有理数域的不足之处.

首先，从分析学的基本运算——极限的角度来考虑. 我们在下面的例子中将看到，有理数域在极限运算下，不是一个封闭的数域，正像自然数集在减法或除法运算下，是不封闭的一样.

在第一章里，已经一般地定义了集 A 上的序列(见第一章定义7)，若 A 为有理数集，则得到有理数序列. 因此，有理数序列，乃是自然数集合到有理数域内的一个映射 f

$$r_n=f(n) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

下面我们来定义有理数序列的极限.

定义 1 设(r_n)是有理数序列. 如果存在有理数 l，使得对于任何给定的正有理数 ε，都可以找到自然数 $N=N(\varepsilon)$，当自然数 $n\geqslant N$时，便有不等式

$$|r_n-l|<\varepsilon$$

成立，则称有理数 l 是序列(r_n)的极限，或称序列(r_n)收敛到 l，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=l$.

［例 1］ 有理数序列$\left(\dfrac{1}{n}\right)$和$\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$都以 0 为极限.（证明略）.

定义 2 设(r_n)是有理数序列. 如果对于任给的正有理数ε，都可以找到自然数 $N=N(\varepsilon)$，使得对于一切大于或等于N的自然

数 n 和m，不等式

$$|r_n - r_m| < \varepsilon$$

都成立，则称(r_n)是一个有理数基本序列.

定义 1 指出，对有极限的有理数序列(r_n)来说，当自然数 n 无限增大时，序列的第 n 项可以与一个确定的有理数无限接近. 定义 2 则指出，对有理数的基本序列(r_n)来说，当自然数无限增大时，序列(r_n)的任意两项可以互相无限接近，这是一种自身具有"凝聚"趋势的有理数序列.

容易看出，一个收敛的有理数序列，一定是有理数基本序列. 事实上，若 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = l$，则对任给的正有理数 ε，可以找到自然数N，当自然数 $n \geqslant N$ 时，有

$$|r_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是当自然数 $n \geqslant N$ 和 $m \geqslant N$ 时，便有

$$|r_n - r_m| = |r_n - l + l - r_m| \leqslant |r_n - l| + |l - r_m|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以(r_n)是有理数基本序列.

反过来，如果(r_n)是一个有理数基本序列，它是否也一定收敛到一个确定的有理数呢？答案是否定的.

［例 2］ 考虑有理数序列(r_n):

$$r_1 = 0.1$$

$$r_2 = 0.101$$

$$r_3 = 0.101001$$

……

$$r_n = 0.1010010\cdots 01\underbrace{00\cdots 0}_{n-1\text{个}}1$$

……

容易验证，这是一个有理数基本序列．因为对任何自然数$n\geqslant N$和$m\geqslant N$，都有

$$|r_n-r_m|\leqslant\frac{1}{10^N}$$

而$\frac{1}{10^N}$当N充分大时可以小于任何预先给定的正有理数ε．因此只要取N充分大，当$n\geqslant N$和$m\geqslant N$时，必有

$$|r_n-r_m|<\varepsilon$$

然而这个有理数基本序列却不存在有理数的极限．为了证明这一点，先指出它的两个性质：

1° $r_n<r_{n+1}$（对任何自然数n）；

2° 对任何的自然数n和m都有

$$r_n<r_m+\frac{2}{10^{\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)}}$$

性质1°是显然的．至于2°，当$m\geqslant n$时，也是显然的．下面假定$m<n$，由

$$\begin{aligned}r_n&=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{1+2}}+\cdots+\frac{1}{10^{1+2+\cdots+n}}\\&=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{1+2}}+\cdots+\frac{1}{10^{1+2+\cdots+m}}+\frac{1}{10^{1+2+\cdots(m+1)}}\\&\quad+\cdots+\frac{1}{10^{1+2+\cdots+n}}\\&=r_m+\frac{1}{10^{\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)}}\left[1+\frac{1}{10^{m+2}}+\cdots\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{10^{(m+2)+\cdots+n}}\right]\end{aligned}$$

因为

$$1+\frac{1}{10^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{10^{(m+2)+\cdots+n}}<2$$

所以性质 2°当 $m<n$ 时也成立.

如果(r_n)以有理数$\frac{p}{q}$为极限, 则由 1°, 对每一个 n, 必有

$$r_n<\frac{p}{q}$$

此外, 在不等式 2°中, 让m固定而令 $n\to\infty$, 即得

$$\frac{p}{q}\leqslant r_m+\frac{2}{10^{\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)}} \qquad (m=1, 2, \cdots)$$

于是对任何自然数 n 和 m 便有不等式

$$r_n<\frac{p}{q}\leqslant r_m+\frac{2}{10^{\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)}}$$

特别地, 取 $n=m=q$, 则得

$$r_q<\frac{p}{q}\leqslant r_q+\frac{2}{10^{\frac{q(q+1)}{2}+(q+1)}}$$

从而推出

$$0<(p-qr_q)\cdot 10^{\frac{q(q+1)}{2}}\leqslant\frac{2q}{10^{q+1}}<1$$

可是 $(p-qr_q)10^{\frac{q(q+1)}{2}}$ 是一个整数, 因而上述不等式是不可能的, 这个矛盾说明(r_n)不可能收敛到一个有理数.

[**例 3**] 考虑有理数序列(r_n), 其中

$$r_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

先证明它是一个有理数的基本序列. 设 p 为任一自然数, 我们有

$$\begin{aligned} r_{n+p}-r_n&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+p)!}\\ &=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+p)}\right]\end{aligned}$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\frac{1}{(n+2)^{p-1}}\right]$$

$$<\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{n+2}\right)}<\frac{1}{n!}$$

于是，对于任给的正有理数 ε，选取自然数 $N=E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$(*)，则当自然数 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 时，便有

$$|r_n-r_m|<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

因此 (r_n) 是一个有理数基本序列.

下面证明它不可能有有理数的极限.

根据序列 (r_n) 的定义，容易验证下列两个不等式

1° 对任何自然数 n，有 $r_n<r_{n+1}$；

2° 对任何自然数 $n>1$，有 $r_{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}<r_n+\frac{1}{n!}$.

如果 (r_n) 有一个有理数的极限 $\frac{p}{q}$，则由 1° 和 2° 即知，对任何自然数 n 和 m，必有

$$r_n<\frac{p}{q}<r_m+\frac{1}{m!}$$

特别地，令 $n=m=q$，则得

$$r_q<\frac{p}{q}<r_q+\frac{1}{q!}$$

于是有

$$0<(p-qr_q)(q-1)!<1$$

但是 $(p-qr_q)(q-1)!$ 是一个整数，因而这个不等式是不可能的. 所以 (r_n) 不可能以有理数为其极限.

(*) $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ 表示不超过数 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的最大整数.

上述两个例子说明，有理数域在极限运算下是不"封闭"的．某些有理数序列本身尽管有凝聚的趋势，但是在有理数的范围内却找不着一个极限值．有理数域的这种"不完备性"，正是它的本质的缺陷，这个缺陷使得数学分析不能以有理数域作为它立论的基础．

下面再从另一方面的观点来谈谈有理数域的这个基本缺陷．在绪论里已经提到了古希腊毕达哥拉斯学派对不可公度性的发现．毕达哥拉斯学派从大自然与人类知识是既一致又和谐的这个信念出发，认为数是构成宇宙的要素，他们把抽象的理性观念与具体的经验混合起来，认为物质世界只不过是数学概念的具体实现，自然界的一切关系都可以简化为数的关系——"万物皆为数"（毕达哥拉斯名言）．根据这个信念，他们试图将数与量完全等同起来，认为任何线段的长度（假若取定了一个线段作为单位长度）必然要对应一个有理数．但是这一思想很快就幻灭了，因为他们发现单位正方形对角线的长是不能用有理数去表示的．这个发现告诉了人们有理数并不能连续地铺满一条无限长直线，在一条数轴上有许许多多的点的"孔隙"，它们是不能用有理数来表示的．那末，我们应该怎么样去扩充数域，使得数轴上的"孔隙"都能够无一遗漏地被数所填满呢？

正是对有理数的缺陷沿着上面两个方面进行思索的结果，使得康托尔和戴德金在十九世纪下半叶同时洞悉了无理数的本质，并得到了表示它们的两种形式，从而独立地奠定了实数的构造理论．既然有凝聚趋势的某些有理数基本序列不以有理数为极限，那么它就应当凝聚到无理数，这就使康托尔找到了无理数的表示形式．戴德金根据毕达哥拉斯学派的发现去分析直线连续性的本质，认识到它并不是单凭稠密性就能立刻得到的，直线之所以连续，是由于它上面的任何一点都把直线划分成了两部分，使得一部分的

点总是在另一部分点的一侧. 反过来, 只要直线划分成了这样的两部分, 它就必然要有一个分界点, 所以直线上的任何一点与它上面的一个分割乃是一回事, 这就使得戴德金得到了另一种无理数的表示形式. 上面这两种实数的严格的构造理论以及它们的等价性, 我们将在下两章里介绍.

习　题

1. 证明由递推公式

$$x_0=1$$

$$x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

决定的有理数序列(x_n)是一个基本序列, 并且它不以有理数为极限.

第三章　实数的康托尔(Cantor)构造

§1　康托尔的实数定义

从上一章末尾所举的例子里，我们看到了有理数集合虽然关于四则运算是封闭的，然而对分析学最重要的运算——极限，却不是“封闭”的．若干有“凝聚”特征的有理数序列在有理数范围内不存在它要凝聚到的那个“数”，为了建立分析学的严谨基础，这一障碍必须加以克服．柯西曾设想这种在有理数范围内没有极限、但本身具有凝聚特征的有理数序列就趋于无理数，但是这时必须先验地假设无理数是存在的．一方面要把无理数定义作某些有理数序列的极限，而另一方面，这些有理数序列极限的存在性又只能在有了无理数之后才得到保证，这就产生了一个逻辑的自身循环．这个循环，柯西当初大概并没有注意到．怎样才能得到不依赖于极限存在的无理数定义呢？十九世纪后半叶经过梅莱、维尔斯特拉斯、海涅和康托尔等人的努力，终于完成了今天所谓的实数的康托尔理论．

考虑全体有理数基本序列(r_n)所组成的集合$\mathscr{M}$，在这个集合上引进一个等价关系如下：

定义 1　设(r_n)和(s_n)都是有理数基本序列，如果$\lim\limits_{n\to\infty}(r_n-s_n)=0$，则称$(r_n)$和$(s_n)$是等价的，记作$(r_n)\sim(s_n)$．

不难验证关系“$\sim$”是一个等价关系，它把集合$\mathscr{M}$分成了若干个等价类（参阅第一章§3）．不同等价类里的有理数基本序列是互相不等价的，而在每一个等价类里都可以任选一个有理数基本序列作为代表，它完全确定了该等价类．

［例 1］ 有理数序列$\left(\frac{1}{n}\right)$和$\left(\frac{1}{2^n}\right)$，以及每一项都等于 0 的序列$(0_{(n)})$，它们都以 0 为极限，所以它们都是有理数基本序列，且属于同一个等价类.

［例 2］ 设(r_n)和(s_n)是等价的有理数基本序列，且序列(r_n)以有理数 r 为极限，则序列(s_n)也以 r 为极限. 因为对于任给的正有理数 ε，根据$\lim\limits_{n\to\infty} r_n=r$，可以找到自然数 N_1，使当自然数 $n\geqslant N_1$ 时，便有

$$|r_n-r|<\frac{\varepsilon}{2}$$

另外，根据$(r_n)\sim(s_n)$，又存在自然数 N_2，使得当自然数 $n\geqslant N_2$ 时，有

$$|r_n-s_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

那末，取 $N=\max(N_1, N_2)$，则当自然数 $n\geqslant N$ 时，将有

$$|s_n-r|\leqslant|s_n-r_n|+|r_n-r|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=r$. 如果记每一项都等于 r 的常值序列为 $(r_{(n)})$，则(r_n)、(s_n)和$(r_{(n)})$都属于同一个等价类，显然，这个等价类里的任何一个有理数基本序列都以有理数 r 为它的极限. 很自然地，我们把$(r_{(n)})$取作是这个等价类的代表.

定义 2 有理数基本序列的集合$\mathscr{M}$按等价关系“～”划分的每一个等价类称为一个实数.

下面我们用希腊字母 α、β、γ、…表示实数，而用 R 表示实数全体的集合. 每个等价类 α 中任一序列(r_n)都称为是该实数的一个代表，即有理数基本序列(r_n)是实数 α 的代表，当且仅当$(r_n)\in\alpha$. 把实数定义为有理数基本序列的等价类，这对于初读者也许会感到不习惯，实际上类似的情况我们在第二章里已经遇到过了. 我们

已经熟悉的负数、分数等，事实上都是某种等价类．例如，负数 -3 可以同时写成

$$1-4=-3$$
$$2-5=-3$$
$$3-6=-3$$
$$\cdots\cdots$$

由第二章§3，它就是一切等价的自然数偶

$$(4,1),\ (5,2),\ (6,3),\ \cdots$$

所组成的等价类，(4, 1)是它的一个代表．而分数 $\frac{1}{2}$ 可以同时表为

$$\frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{2}$ 就是整数偶

$$(2,1),(4,2),(6,3),(8,4),\cdots$$

所组成的等价类．在这里，实数也是一个等价类，它的代表不是数偶，而是有理数的基本序列．

设 r 是一个有理数，则每一项都等于 r 的序列 $(r_{(n)})$ 确定了一个 $\mathscr{M}$ 的等价类，这个类里的任一个有理数基本序列都以 r 为极限．很自然地，我们把这个等价类看作是由有理数 r 产生的，它所确定的实数就称为有理实数．对于由有理数 r 产生的有理实数，我们特别用符号 $\bar{r}$ 去表示它．例如，$(0_{(n)})$ 成 $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 所属的那个等价类就是有理实数 $\bar{0}$；$(1_{(n)})$ 或 $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 所属的那个等价类是有理实数 $\bar{1}$．

如果有理数基本序列 (r_n) 没有有理数的极限，我们就称以它为代表的等价类所确定的实数是无理实数．例如，第二章§5中的例2和例3里的有理数基本序列的等价类确定的实数便都是无

理实数，前者可以表成无限不循环小数 0.1010010001…，后者就是自然对数的底 e.

因此，实数是由有理实数和无理实数这两大类组成的.

习　题

1. 证明本节定义 1 中的关系"～"是一个等价关系.

2. 证明 $r_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}(n=1, 2, \cdots)$ 是一个有理数基本序列.

3. 证明 $r_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(n=1, 2, \cdots)$ 是一个有理数基本序列.

4. 证明对任何有理数 r，$\left(\frac{r^n}{n!}\right)$ 都是一个有理数基本序列.

5. 设有理数基本序列 (r_n) 和 (s_n) 不等价，试用 ε-N 语言叙述之.

6. 证明 $r_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}(n=1, 2, \cdots)$ 不是一个有理数基本序列.

§2　实数的加法及其运算规律

下面我们来讨论上节定义的实数如何进行运算以及这些运算所遵循的法则. 显然，实数具有的运算应当使得它的有理实数部分完全保持有理数的一切代数运算性质，从而使得有理实数集是一个与有理数域同构的域，这样才能使得我们所构造的实数是有理数域的一个扩张.

实数是有理数基本序列的等价类，实数的和，也就是等价类的和. 等价类的和该怎样理解呢？我们先证明两个引理.

引理 1　如果 (r_n)、(s_n) 是两个有理数基本序列，则 (r_n+s_n) 也是有理数基本序列.

证明　因为 (r_n) 和 (s_n) 都是有理数基本序列，所以对任给的正有理数 ε，可以找到自然数 N_1 和 N_2，使得当自然数 $n\geqslant N_1$ 和

$m\geqslant N_1$时，有

$$|r_n-r_m|<\frac{\varepsilon}{2}$$

而当自然数 $n\geqslant N_2$ 和 $m\geqslant N_2$时，有

$$|s_n-s_m|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N=\max(N_1, N_2)$，则当自然数 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 时便有

$$|(r_n+s_n)-(r_m+s_m)|\leqslant|r_n-r_m|+|s_n-s_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

故(r_n+s_n)是有理数基本序列.

引理 2　设(r_n)、(r_n')、(s_n)和(s_n')都是有理数基本序列，若(r_n)与(r_n')等价，(s_n)与(s_n')等价，则(r_n+s_n)与$(r_n'+s_n')$是等价的有理数基本序列.

证明　根据引理 1，(r_n+s_n)和$(r_n'+s_n')$都是有理数基本序列，下面证明它们是等价的. 对任给的正有理数 ε，因为(r_n)与(r_n')等价，所以可以找到自然数 N_1，使得当自然数 $n\geqslant N_1$时，有

$$|r_n-r_n'|<\frac{\varepsilon}{2}$$

同样，由于(s_n)与(s_n')等价，又可以找到自然数 N_2，使得当 $n\geqslant N_2$时有

$$|s_n-s_n'|<\frac{\varepsilon}{2}$$

令 $N=\max(N_1, N_2)$，那末当自然数 $n\geqslant N$ 时，便有

$$|(r_n+s_n)-(r_n'+s_n')|\leqslant|r_n-r_n'|+|s_n-s_n'|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这就是说(r_n+s_n)与$(r_n'+s_n')$是等价的.

现在来考虑如何定义两个实数的和. 设实数 α 是以有理数基本序列(r_n)为代表的等价类，实数 β 是以有理数基本序列(s_n)为

代表的等价类，则由引理 1，(r_n+s_n)是一个有理数基本序列，它确定了一个有理数基本序列的等价类．引理 2 告诉我们，这个等价类与 α 中(r_n)的选取和 β 中(s_n)的选取是无关的，因此，它是完全被 α 和 β 唯一确定的等价类．我们就把这个等价类确定的实数定义作实数 α 与 β 的和．于是，可以给出以下定义：

定义 3 设实数 α 是以有理数基本序列 (r_n) 为代表的等价类，实数 β 是以有理数基本序列(s_n)为代表的等价类，称以(r_n+s_n)为代表的有理数基本序列等价类为实数 α 和 β 的**和**，记作 $\alpha+\beta$．

特别地，如果 $\bar{r}$ 和 $\bar{s}$ 是两个有理实数，那末根据定义，$\bar{r}+\bar{s}$ 应当是以$(r_{(n)}+s_{(n)})=((r+s)_{(n)})$为代表的有理数基本序列等价类，即 $\bar{r}+\bar{s}=\overline{r+s}$．因此，这样定义的实数加法运算，对于有理实数来说，与原来有理数的加法运算是一致的．

现在我们来证明：实数加法还保持了有理数加法所具有的那些性质．

命题 1 实数集合 R 关于加法运算是一个阿贝尔群．

证明 $1°$ 加法结合律$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$：

设$(r_n)\in\alpha$、$(s_n)\in\beta$、$(t_n)\in\gamma$，由于有理数的加法运算是满足结合律的，所以

$$((r_n+s_n)+t_n)=(r_n+(s_n+t_n))$$

即$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

$2°$ 加法单位元 $\bar{0}$ 是$(0_{(n)})$的等价类：

设$(r_n)\in\alpha$，由

$$(r_n+0_{(n)})=(r_n)$$

便知 $\alpha+\bar{0}=\alpha$；

$3°$ 加法的逆运算：

设$(r_n)\in\alpha$，显然$(-r_n)$也是有理数基本序列，记它的等价类为

实数$-\alpha$，则由

$$(r_n+(-r_n))=(0_{(n)})$$

知$\alpha+(-\alpha)=\bar{0}$；

4° 加法交换律$\alpha+\beta=\beta+\alpha$：

设$(r_n)\in\alpha$、$(s_n)\in\beta$，由有理数加法的可交换性得

$$(r_n+s_n)=(s_n+r_n)$$

这就是说$\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

综合1°—4°，便知R是个阿贝尔群.

§3 实数的乘法及其运算规律

两个实数的乘积就是两个有理数基本序列等价类的乘积. 两个这种等价类的乘积该如何理解呢？为了弄清楚这一点，先证明几个简单的引理.

定义4 (r_n)是有理数序列，如果存在正有理数M，使得不等式

$$|r_n|\leqslant M$$

对一切自然数n都成立，则称(r_n)是有界的.

引理3 有理数基本序列是有界的.

证明 设(r_n)是有理数基本序列，则对$\varepsilon=1$，可以找到自然数N，使得当自然数$n\geqslant N$和$m\geqslant N$时有

$$|r_n-r_m|<1$$

于是对一切自然数$n>N$，便有

$$|r_n|=|r_n-r_N+r_N|\leqslant|r_n-r_N|+|r_N|<|r_N|+1$$

令$M=\max(|r_1|,\cdots,|r_{N-1}|,|r_N|+1)$，则对一切自然数$n$都有

$$|r_n|\leqslant M$$

所以(r_n)是有界的.

引理4 如果(r_n)和(s_n)是有理数基本序列，则(r_ns_n)也是有

理数基本序列.

证明 根据引理 3, (r_n)和(s_n)都是有界的. 假定存在正有理数M, 使得对一切自然数n都有

$$|r_n|\leqslant M,\quad |s_n|\leqslant M$$

任给正有理数ε, 因为(r_n)是基本序列, 所以对正有理数$\frac{\varepsilon}{2M}$, 可以找到自然数N_1, 使得当自然数$n\geqslant N_1$和$m\geqslant N_1$时, 便有

$$|r_n-r_m|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

同样, 由于(s_n)也是基本序列, 又可以找到自然数N_2, 使得当自然数$n\geqslant N_2$和$m\geqslant N_2$时, 有

$$|s_n-s_m|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

于是令$N=\max(N_1, N_2)$, 当自然数$n\geqslant N$和$m\geqslant N$时便得

$$\begin{aligned}|r_ns_n-r_ms_m|&=|r_ns_n-r_ms_n+r_ms_n-r_ms_m|\\&\leqslant|s_n||r_n-r_m|+|r_m||s_n-s_m|\\&<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就是说(r_ns_n)是一个有理数基本序列.

引理 5 设(r_n)、(r'_n)、(s_n)和(s'_n)都是有理数基本序列, 若(r_n)与(r'_n)等价, (s_n)与(s'_n)等价, 则有理数基本序列(r_ns_n)与$(r'_ns'_n)$等价.

证明 因为基本序列(r'_n)和(s_n)是有界的, 所以存在一个正有理数M, 使得对一切自然数n都有

$$|r'_n|\leqslant M,\quad |s_n|\leqslant M$$

任给正有理数ε, 由于(r_n)和(r'_n)等价, 可以找到自然数N_1, 使得当自然数$n\geqslant N_1$时, 有

$$|r_n - r_n'| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

同样，由(s_n)和(s_n')等价，又可以找到自然数 N_2，使得对于任何自然数 $n \geqslant N_2$ 时，有

$$|s_n - s_n'| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

令 $N = \max(N_1, N_2)$，当自然数 $n \geqslant N$ 时，便得

$$\begin{aligned} |r_n s_n - r_n' s_n'| &= |r_n s_n - r_n' s_n + r_n' s_n - r_n' s_n'| \\ &\leqslant |s_n| \, |r_n - r_n'| + |r_n'| \, |s_n - s_n'| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

所以$(r_n s_n)$与$(r_n' s_n')$是等价的有理数基本序列.

现在来引进两个实数乘积的概念. 设实数 α 是以有理数基本序列(r_n) 为代表的等价类，实数 β 是以有理数基本序列(s_n)为代表的等价类，由引理 4，$(r_n s_n)$是一个有理数的基本序列，它确定了一个有理数基本序列等价类. 根据引理 5，这个等价类与 α 中(r_n)的选取和 β 中(s_n) 的选取是无关的，因而它被 α 和 β 所唯一确定. 我们便把这个等价类规定为实数 α 和 β 的乘积. 于是可以给出以下定义.

定义 5　设实数 α 是以有理数基本序列 (r_n) 为代表的等价类，实数 β 是以有理数基本序列(s_n)为代表的等价类，称以有理数基本序列$(r_n s_n)$为代表的等价类为实数 α 和 β 的**乘积**，记作 $\alpha \cdot \beta$.

不难验证，在这个定义下，两个有理实数的乘积与原来有理数的乘积是一致的，即对任意的有理实数 $\bar{r}$ 和 $\bar{s}$ 来说，有 $\bar{r} \cdot \bar{s} = \overline{r \cdot s}$.

下面我们来证明有理数乘法所熟知的那些运算法则对实数乘法也都是成立的.

引理 6　设(r_n)是非零有理数的基本序列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \neq 0$，则存在正有理数 ε_0，使得不等式

$$|r_n| \geqslant \varepsilon_0$$

对一切自然数 n 都成立，且$\left(\frac{1}{r_n}\right)$也是有理数基本序列.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \neq 0$, 所以存在正有理数 ε_1，使得不管N是怎样的自然数，总有自然数 $n_N > N$, 满足

$$|r_{n_N}| > \varepsilon_1$$

由于(r_n)是基本序列，对$\frac{\varepsilon_1}{2}>0$，可以找到自然数 N_1，当自然数 $n \geqslant N_1$ 和 $m \geqslant N_1$ 时，有

$$|r_n - r_m| < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

于是当自然数 $n > n_{N_1}$ 时，便有

$$|r_n| = |r_n - r_{n_{N_1}} + r_{n_{N_1}}| \geqslant |r_{n_{N_1}}| - |r_n - r_{n_{N_1}}| > \frac{\varepsilon_1}{2}$$

令 $\varepsilon_0 = \min\left(|r_1|, \cdots, |r_{n_{N_1}}|, \frac{\varepsilon_1}{2}\right)$, 则 ε_0 是正有理数，且对一切自然数 n, 都有

$$|r_n| \geqslant \varepsilon_0$$

剩下来还要证明$\left(\frac{1}{r_n}\right)$是基本序列. 对任给的正有理数 ε，因为(r_n)是基本序列，所以可以找到自然数 N，使得当自然数 $n \geqslant N$ 和 $m \geqslant N$ 时，有

$$|r_n - r_m| < \varepsilon_0^2 \varepsilon$$

于是当自然数 $n \geqslant N$ 和 $m \geqslant N$ 时便得

$$\left|\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_m}\right| = \frac{|r_m - r_n|}{|r_n r_m|} < \frac{1}{\varepsilon_0^2} \cdot \varepsilon_0^2 \varepsilon = \varepsilon$$

这就是说$\left(\frac{1}{r_n}\right)$是有理数基本序列.

定理 1 实数集合 R 对于如上定义的加、乘运算是一个域.

证明 一、由命题 1 知：R 关于 § 2 里定义的加法组成一个

加法阿贝尔群；

二、$R\backslash\{\bar{0}\}$关于乘法是一个阿贝尔群；

1° 乘法交换律$\alpha\beta=\beta\alpha$：

设$(r_n)\in\alpha$、$(s_n)\in\beta$，由有理数乘法的可交换性

$$(r_ns_n)=(s_nr_n)$$

即知$\alpha\beta=\beta\alpha$.

2° 乘法结合律$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$：

设$(r_n)\in\alpha$、$(s_n)\in\beta$、$(t_n)\in\gamma$，由有理数乘法的结合律

$$((r_ns_n)t_n)=(r_n(s_nt_n))$$

即知$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$.

3° 乘法单位元$\bar{1}$是$(1_{(n)})$的等价类：

设$(r_n)\in\alpha$，则由

$$(r_n\cdot 1_{(n)})=(r_n)$$

即得$\alpha\cdot\bar{1}=\alpha$.

4° 乘法的逆运算：对任何两个实数α和β，其中$\alpha\neq\bar{0}$，存在唯一的实数ξ，使得

$$\alpha\cdot\xi=\beta$$

因为$\alpha\neq\bar{0}$，我们可以选取$(r_n)\in\alpha$，使得

$$r_n\neq 0 \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

当然，$\lim\limits_{n\to\infty}r_n\neq 0$. 由引理6，$\left(\dfrac{1}{r_n}\right)$也是一个有理数基本序列，它所代表的等价类确定了一个实数，记为α^{-1}，显然由

$$\left(r_n\cdot\frac{1}{r_n}\right)=(1_{(n)})$$

知

$$\alpha\cdot\alpha^{-1}=\bar{1}$$

我们把α^{-1}称为实数α的逆元. 令$\xi=\alpha^{-1}\cdot\beta$，则它满足方程

$$\alpha\cdot\xi=\beta$$

至于 ξ 的唯一性，请读者自己去考虑.

三、加法与乘法运算满足分配律 $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$:

设 $(r_n)\in\alpha$、$(s_n)\in\beta$、$(t_n)\in\gamma$，由有理数加、乘运算满足分配律得

$$(r_n(s_n+t_n))=(r_ns_n+r_nt_n)$$

此即 $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$. 证毕.

习　题

1. 证明 $(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$.

2. 证明若 $\alpha=\bar{0}$, $\beta\neq\bar{0}$, 则 $\alpha\beta=\bar{0}$.

3. 证明方程 $\alpha\cdot\xi=\beta$ 的解是唯一的.

4. 若实数 $\alpha\neq\bar{0}$, 则必存在有理数基本序列 $(r_n)\in\alpha$, 使得对一切自然数 n, 都有 $r_n\neq 0$.

§4　实数的序(*)

我们知道，有理数是个有序域，它的次序大小可以这样来规定：两个有理数 r_1 和 r_2，我们说 r_1 在 r_2 之前，或 r_1 小于 r_2，意即 r_2-r_1 是一个正有理数. 下面我们将用同样的方法来给实数规定顺序关系，为此，首先要弄清楚什么是正实数？它是由什么样的有理数基本序列等价类确定的？

定义 6　有理数基本序列 (r_n) 称为是正的，如果存在正有理数 ε_0 和自然数 N，使得当自然数 $n\geq N$ 时，不等式

$$r_n\geq\varepsilon_0$$

成立.

所谓正有理数基本序列就是从某一项开始都大于某个正有理数的有理数基本序列. 从图形上看，它在数轴上表示一个至多只有有限项落在左半轴（包括原点）的有理数基本序列，那末，显然它

(*)　序及序域的概念见第一章§4、§6.

将凝聚在右半轴了.

引理 7 设(r_n)和(s_n)是等价的有理数基本序列,(r_n)还是正有理数基本序列,则(s_n)也是正有理数基本序列.

证明 由(r_n)是正有理数基本序列,必存在正有理数ε_0和自然数N_1,使当自然数$n\geqslant N_1$时有

$$r_n\geqslant\varepsilon_0$$

因为(s_n)与(r_n)等价,所以对正有理数$\frac{\varepsilon_0}{2}$,可以找到自然数N_2,使当自然数$n\geqslant N_2$时有

$$|r_n-s_n|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

令$N=\max(N_1,N_2)$,则当自然数$n\geqslant N$时,便有

$$s_n=r_n-(r_n-s_n)\geqslant r_n-|r_n-s_n|>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}$$

这就是说(s_n)是正有理数基本序列.

这条引理告诉我们,在一个有理数基本序列等价类里,只要有一个基本序列是正的,那末所有其他的基本序列就都是正的.因此我们可以给出下面的定义:

定义 7 由正有理数基本序列等价类确定的实数称为正实数.

全体正实数组成的集合一般记作R_+. 显然,正有理实数$\bar{r}$都属于R_+,而$\bar{0}\bar{\in}R_+$. 下面的定理说明了集合R_+满足有序域正元素集的性质 i), ii), iii):

定理 2 1° $R_+\cap R_-=\varnothing$,其中$R_-=\{-\alpha|\alpha\in R_+\}$;

2° $R=R_+\cup\{\bar{0}\}\cup R_-$;

3° 若α和β都属于R_+,则$\alpha+\beta$和$\alpha\beta$都属于R_+.

证明 1° 用反证法. 倘若存在$\alpha\in R_+\cap R_-$,则由$\alpha\in R_-$,有$\beta\in R_+$,使得$\alpha=-\beta$. 如取$(r_n)\in\alpha$,则有$(-r_n)\in\beta$. 根据正有理

数基本序列的定义，分别存在正有理数 ε_1 和 ε_2 以及自然数 N_1 和 N_2，使得当自然数 $n\geqslant N_1$ 时，有

$$r_n\geqslant\varepsilon_1$$

而当自然数 $n\geqslant N_2$ 时，则有

$$-r_n\geqslant\varepsilon_2$$

取 $N=\max(N_1, N_2)$，那末当自然数 $n\geqslant N$ 时，便同时成立着不等式

$$r_n\geqslant\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)>0 \text{ 和} -r_n\geqslant\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)>0$$

这与有理数的顺序关系是矛盾的，故 $R_+\cap R_-=\varnothing$.

2° 设 $\alpha\in R, \alpha\neq\bar{0}$. 我们可以选取 $(r_n)\in\alpha$，满足

$$r_n\neq 0 \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

因为 $\alpha\neq\bar{0}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n\neq 0$. 根据引理 6，存在正有理数 ε_0，使得不等式

$$|r_n|\geqslant\varepsilon_0$$

对一切自然数 n 都成立. 由于 (r_n) 是基本序列，对正有理数 $\frac{\varepsilon_0}{2}$，可以找到自然数 N，当自然数 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 时，有

$$|r_n-r_m|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

如果 $r_N>0$，那末当 $n\geqslant N$ 时，便有

$$r_n=r_n-r_N+r_N\geqslant r_N-|r_n-r_N|>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}$$

这时 $\alpha\in R_+$. 如果 $r_N<0$，那末当 $n\geqslant N$ 时，将有

$$-r_n=-r_N+r_N-r_n\geqslant|r_N|-|r_N-r_n|>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}$$

即 $\alpha\in R_-$. 故 $R=R_+\cup\{\bar{0}\}\cup R_-$.

综合 1° 与 2° 便证明了 R_+ 满足正元素集的性质 i)，下面再证明它满足性质 ii)，iii).

3° 设α和β都属于R_+，而有理数基本序列(r_n)和(s_n)分别属于等价类α和β. 因为α和β是正实数，所以存在一个正有理数ε_0和自然数N，使得当自然数$n\geqslant N$时，不等式

$$r_n\geqslant\varepsilon_0 \quad 和 \quad s_n\geqslant\varepsilon_0$$

都成立. 这样，当$n\geqslant N$时便有

$$r_n+s_n\geqslant 2\varepsilon_0 \quad 和 \quad r_ns_n\geqslant\varepsilon_0^2$$

这也就是说$\alpha+\beta$和$\alpha\cdot\beta$都属于R_+. 定理证毕.

现在来给实数规定顺序：

定义 8 如果$\alpha-\beta$是正实数，则称β小于α(β在α之前或α大于β)，记作$\beta<\alpha$.

容易证明，这样规定的顺序是满足顺序关系两条公理的. 因此，全体实数R构成了一个有序域. 此外，我们还不难证明实数的顺序关系与运算之间有下列联系：

若$\alpha<\beta$，则对任何实数γ都有$\alpha+\gamma<\beta+\gamma$.

若$\alpha<\beta$，则对任何正实数γ都有$\alpha\gamma<\beta\gamma$.

有理数组成的有序域与现在构造出来的实数域有什么关系呢？我们将证明Q与R的一个子域——即全体有理实数组成的子域——之间可以建立起一个保持顺序不变的同构映射. 这样，从代数结构上来说，便可以把Q和R的有理实数子域完全看成是同一个代数体系，不再去区分它们. 因此，实数域R便成为有理数域Q的一个扩张.

定理 3 有理数域Q与实数域R的一个子域$\bar{Q}$序同构，因此实数域是有理数域的扩张.

证明 我们以$\bar{Q}$记R中全体有理实数组成的集合，不难验证$\bar{Q}$是R的一个子域.

设r为任一有理数，$\bar{r}$为对应的有理实数，则

$$\sigma: r\longrightarrow\bar{r}$$

就是一个Q到$\bar{Q}$的映射. 剩下来只要证明σ是保持顺序不变的同构映射即可。

1° σ是同构映射:

显然σ是Q映到$\bar{Q}$上的一对一映射, 并且保持运算关系

$$\sigma(r_1+r_2)=\overline{r_1+r_2}=\bar{r}_1+\bar{r}_2=\sigma(r_1)+\sigma(r_2)$$

$$\sigma(r_1r_2)=\overline{r_1r_2}=\bar{r}_1\cdot\bar{r}_2=\sigma(r_1)\cdot\sigma(r_2)$$

2° σ保持顺序关系不变:

如果$r_1<r_2$, 则$r_2-r_1>0$, 所以

$$\sigma(r_2)-\sigma(r_1)=\sigma(r_2-r_1)=\overline{r_2-r_1}\in R_+$$

即

$$\sigma(r_2)>\sigma(r_1)$$

证毕。

习　题

1. $\alpha\in R$, $\alpha\neq\bar{0}$, 证明$\alpha^2\in R_+$.
2. 设实数α和β的乘积属于R_+, 若α属于R_+, 则β也属于R_+.
3. 设$\alpha\in R_+$, 而$\beta\in R_-$, 则$\alpha\beta\in R_-$.
4. 若$\alpha\in R_+$, 则$\alpha^{-1}\in R_+$.
5. 设α和β都属于R_-, 则$\alpha\beta$属于R_+.
6. 证明任意有限个实数α_1、α_2、…、α_n中, 一定有一个最大者$\max(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$和一个最小者$\min(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.
7. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$都是实数, 若$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i>\bar{0}$, 则必存在某指标$i_0(1\leqslant i_0\leqslant n)$使得$\alpha_{i_0}>\bar{0}$.

§5　绝对值与不等式

实数的顺序与运算之间还存在着一系列重要的不等式关系.

命题 2　1° $\alpha_i\leqslant\beta_i(i=1, 2)$, 则$\alpha_1+\alpha_2\leqslant\beta_1+\beta_2$, 等式仅当

$\alpha_i=\beta_i(i=1,2)$时成立;

2° 若$\gamma>\bar{0}$,则$\alpha\leqslant\beta$的充分必要条件是$\alpha\gamma\leqslant\beta\gamma$.

证明 1° 由假设$\alpha_1\leqslant\beta_1$知$(\beta_1+\alpha_2)-(\alpha_1+\alpha_2)=\beta_1-\alpha_1$属于$R_+$或等于$\bar{0}$,所以

$$\alpha_1+\alpha_2\leqslant\beta_1+\alpha_2$$

同理,

$$\beta_1+\alpha_2\leqslant\beta_1+\beta_2$$

故

$$\alpha_1+\alpha_2\leqslant\beta_1+\alpha_2\leqslant\beta_1+\beta_2$$

并且,等式$\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$成立时,还应有

$$\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$$

所以

$$\alpha_1=\beta_1,\qquad \alpha_2=\beta_2$$

利用数学归纳法,读者不难把这一性质推广到任意有限个实数的情形.

2° 若$\alpha\leqslant\beta$,即$\beta-\alpha$等于$\bar{0}$或属于R_+,于是由上一节定理2,$\gamma(\beta-\alpha)$等于$\bar{0}$或属于R_+,即$\alpha\gamma\leqslant\beta\gamma$.反过来,由$\alpha\gamma\leqslant\beta\gamma$,得$\beta\gamma-\alpha\gamma=\gamma(\beta-\alpha)$等于$\bar{0}$或属于$R_+$.当$\gamma(\beta-\alpha)=\bar{0}$时,两边乘以$\gamma^{-1}$,便得$\alpha=\beta$;当$\gamma(\beta-\alpha)\in R_+$时,根据上一节的习题2可得$\beta-\alpha\in R_+$,即$\alpha<\beta$.证毕.

定义 9 对每个实数α,实数

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha & \alpha\in R_+\\ \bar{0} & \alpha=\bar{0}\\ -\alpha & \alpha\in R_-\end{cases}$$

称为α的**绝对值**.

显然,$|\alpha|\geqslant\bar{0}$.

命题 3 设$\alpha>\bar{0}$,则$|\rho|<\alpha$与$-\alpha<\rho<\alpha$等价.

证明 若 $\rho>\bar{0}$，则 $\rho>-\alpha$ 自然成立，而 $|\rho|<\alpha$ 即 $\rho<\alpha$. 若 $\rho\leqslant\bar{0}$，则 $\rho<\alpha$ 自然成立，而 $|\rho|<\alpha$ 即 $-\rho<\alpha$，两边加上 $\rho-\alpha$ 便得 $-\alpha<\rho$.

命题 4 1° $|\alpha|=|-\alpha|$;

2° $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$;

3° $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$;

4° $||\alpha|-|\beta||\leqslant|\alpha-\beta|$.

证明 1° 与 2° 由绝对值的定义便可得到.

3° 当 α、β 同号时，等式 $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ 成立. 当 α、β 异号时，设 $\alpha\leqslant\bar{0}\leqslant\beta$，由

$$\alpha+\beta\leqslant\beta\leqslant\beta+|\alpha|=|\alpha|+|\beta|$$
$$\alpha+\beta\geqslant\alpha\geqslant\alpha-|\beta|=-|\alpha|-|\beta|$$

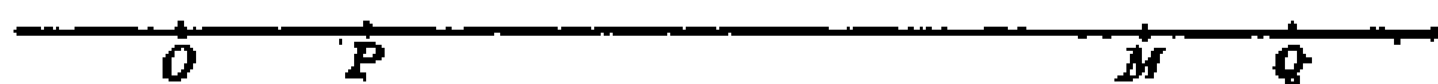
利用命题 3 便得 $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$.

4° 由 3° 可得

$$|\alpha|=|\beta+(\alpha-\beta)|\leqslant|\beta|+|\alpha-\beta|$$
$$|\beta|=|\alpha+(\beta-\alpha)|\leqslant|\alpha|+|\beta-\alpha|$$

再利用命题 3 便得 $||\alpha|-|\beta||\leqslant|\alpha-\beta|$.

在第二章里我们说过，有理数域作为有序域还有一个重要性质，即满足阿基米得公理：若 r 是一个正有理数，则对任何有理数 s，必存在自然数 n，使得 $nr>s$. 换成几何语言，这就是说，设线段 OP 长度为 r，线段 OM 长度为 s，那末不管 OP 多么短，也不管点 M 距离点 O 多么远，用线段 OP 从 O 点出发在直线上逐次截取若



干段以后，总能得到一个点 Q，使得 Q 点在 M 点的右边. 正是因为有理数域的这个性质，它常被称为是一个阿基米得有序域. 经过扩张得到的实数是否还满足阿基米得公理呢？我们下面证明实数域

仍是一个阿基米得有序域.

定理 4　若实数 $\beta>\alpha>\bar{0}$,则存在自然数 N,使得 $\bar{N}\alpha>\beta$.

证明　设$(r_n)\in\alpha$,因为它是一个正有理数基本序列,所以存在自然数 m_0 和 N_1,使得当自然数 $n\geqslant N_1$ 时,有

$$r_n\geqslant\frac{1}{m_0}$$

此外,对于任何的$(s_n)\in\beta$,它一定是有界的,因此存在自然数 n_0,使得对一切自然数 n 都有

$$|s_n|\leqslant n_0$$

我们记 $N=m_0(n_0+1)$,考虑有理数基本序列(Nr_n),它所代表的实数就是 $\bar{N}\alpha$,当$n\geqslant N_1$ 时,因为

$$Nr_n=m_0(n_0+1)r_n\geqslant n_0+1$$

所以当 $n\geqslant N_1$ 时便有

$$Nr_n-s_n>1$$

这就是说 $\bar{N}\alpha>\beta$.

习　题

1. 证明 $\alpha\leqslant\beta$ 的充分必要条件是 $-\beta\leqslant-\alpha$.
2. 证明 $\beta>\alpha>\bar{0}$ 的充分必要条件是 $\alpha^{-1}>\beta^{-1}>\bar{0}$.

§6　实数的完备性

前面我们已经看到,有理数经过扩张得到的实数,关于加、减、乘、除运算仍旧是封闭的,并且它还是一个阿基米得有序域. 但是我们扩充有理数的目的是为了使极限运算能在新的域上得以畅通无阻,那末我们已建立的实数域是否达到了这一目的呢?也就是说,是否任何有理数基本序列(甚至任何实数基本序列)都能趋于一个实数的极限呢?数轴上那些有理数以外的孔隙是否都被所引

进的无理实数全部填满了呢？本节将回答这些问题.

首先，我们先证明实数的一条重要性质，即所谓有理实数的稠密性. 有理实数密密麻麻地分布在数轴上，任何两个有理实数之间总还有一个有理实数，因而也就夹着无穷多个有理实数. 这样，每一个有理实数的周围都聚集着无穷多个有理实数，它们可以任意地接近这个有理实数，因此，除了这个有理实数自身以外，我们不能说有哪一个有理实数是最靠近它的. 无理实数既然是作为漏缺了的有理数基本序列凝聚中心而添加进来的，它的周围照理应聚集着无穷多个有理实数，因此，有理实数在实数中仍然是“无所不在”的. 有理实数的稠密性可以表述为

定理 5　任何两个不同的实数之间必有一个有理实数.

证明　设 ρ 和 σ 是两个实数，$\rho>\sigma$. 取有理数基本序列 $(r_n)\in\rho$ 和 $(s_n)\in\sigma$，因为 $\rho>\sigma$，所以存在正有理数 δ 和自然数 N，使得当自然数 $n\geqslant N$ 时，有

$$r_n>s_n+\delta$$

(r_n) 和 (s_n) 既然都是基本序列，那末对正有理数 $\frac{\delta}{4}$，就可以找到自然数 N_1，使当 $n\geqslant N_1$ 和 $m\geqslant N_1$ 时有

$$|r_n-r_m|<\frac{\delta}{4}$$

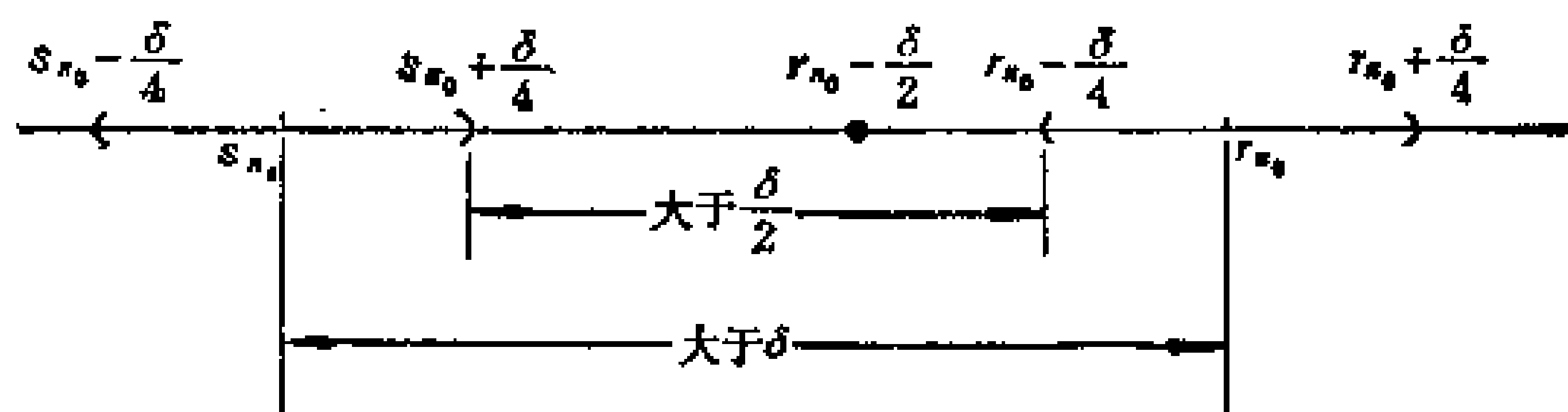
$$|s_n-s_m|<\frac{\delta}{4}$$

我们取自然数 $n_0>\max(N,N_1)$，那末，当 $n\geqslant n_0$ 时便有

$$r_n>s_n+\delta$$

$$r_{n_0}-\frac{\delta}{4}<r_n<r_{n_0}+\frac{\delta}{4}$$

$$s_{n_0}-\frac{\delta}{4}<s_n<s_{n_0}+\frac{\delta}{4}$$



显然，当 $n\geqslant n_0$ 时

$$s_n<s_{n_0}+\frac{\delta}{4}<r_{n_0}-\frac{\delta}{2}<r_{n_0}-\frac{\delta}{4}<r_n$$

令 $\tau=\overline{r_{n_0}-\frac{\delta}{2}}$ 是 $\left(\left(r_{n_0}-\frac{\delta}{2}\right)_{(n)}\right)$ 的等价类，这是一个有理实数，根据实数序的定义

$$\sigma<\tau<\rho$$

证毕.

实际上，我们添加进来的无理实数也并非是孤单的、稀疏的，可以证明它们同样也是稠密的，即任何两个不同的实数之间也一定夹着一个无理实数(证明留给读者)．这样，在任何一个实数的周围就既聚集着无穷多个有理实数又聚集着无穷多个无理实数，它们都可以任意靠近这个实数.

我们曾举过一些例子说明某些有理数基本序列不存在有理数的极限，扩张数域的目的，就是为了让任何有理数基本序列都能有一个"数"作为它的极限．有理数域经过上述扩张以后，我们将要证明，这个目的确实是达到了，它是在扩充了的实数范围内达到的．为此，我们先给实数序列的极限下定义.

定义 10 实数序列 (ρ_n) 称为以实数 ρ 为极限，如果对于任何正实数 ε，都存在自然数 $N=N(\varepsilon)$，使得当自然数 $n\geqslant N$ 时，便有不等式

$$|\rho_n-\rho|<\varepsilon$$

成立．此时亦称序列 (ρ_n) 收敛到 ρ，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\rho$.

定理 6 若有理数基本序列$(r_n)\in\rho$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\bar{r}_n=\rho$.

证明 对任给的正实数ε，要证明存在自然数N，使当$n\geqslant N$时有

$$|\bar{r}_n-\rho|<\varepsilon$$

即当$n\geqslant N$时，$\varepsilon-|\bar{r}_n-\rho|$是正实数.

设$(\varepsilon_m)\in\varepsilon$，这就是要证明当$n\geqslant N$时，存在正有理数$\delta_n$和自然数$M_n$，使得当自然数$m\geqslant M_n$时，不等式

$$\varepsilon_m-|r_n-r_m|\geqslant\delta_n$$

对一切自然数$n\geqslant N$都成立. 因为$\varepsilon>0$，所以有正有理数ε_0和自然数M，使当自然数$m\geqslant M$时，有

$$\varepsilon_m\geqslant\varepsilon_0$$

由于(r_n)是有理数基本序列，对正有理数$\frac{\varepsilon_0}{2}$，可以找到自然数M'，使得只要自然数$n\geqslant M'$和$m\geqslant M'$，就有

$$|r_n-r_m|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

现在取$N=\max(M,M')$，那末对任何$n\geqslant N$，令$M_n=N$，则当自然数$m\geqslant M_n$时，对一切自然数$n\geqslant N$便都有

$$\varepsilon_m-|r_n-r_m|>\frac{\varepsilon_0}{2}$$

定理证毕.

根据本定理，序列

$$0.1,0.101,0.101001,\cdots,0.101001\cdots1\overbrace{00\cdots0}^{n-1\text{个}}1,\cdots$$

$$1,1.4,1.41,1.414,1.4142,\cdots$$

和

$$1+\frac{1}{1!},1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!},\cdots,1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},\cdots$$

都将趋于无理实数.

如上所述,任何有理实数的基本序列在实数域内都有极限.但实数是否就完备了呢?换句话说,实数的基本序列是不是都一定趋于一个实数的极限呢?下面我们要证明任何实数基本序列一定凝聚到一个实数,以这个实数为极限.反过来,任何一个有极限的实数序列也一定是一个实数基本序列,这两条结论综合在一起,就是著名的柯西关于实数序列极限存在的判别准则,它既回答了实数系统关于极限运算的完备性问题,同时又给出了实数序列极限存在的充分必要条件.

定义 11 设(ρ_n)是一个实数序列,如果对于任何正实数ε,都可以找到自然数$N=N(\varepsilon)$,使得只要自然数$n\geqslant N$和$m\geqslant N$,就有不等式

$$|\rho_n-\rho_m|<\varepsilon$$

成立,则称(ρ_n)是一个实数基本序列.

定理 7(实数的完备性——柯西准则) 实数序列(ρ_n)极限存在的充分必要条件是它是一个基本序列.

证明 一、条件的必要性:

对于任给的正实数ε,因为$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\rho$存在,所以我们可以找到一个自然数$N$,使当$n\geqslant N$时有

$$|\rho_n-\rho|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是,当自然数$n\geqslant N$和$m\geqslant N$时,便有

$$|\rho_n-\rho_m|\leqslant|\rho_n-\rho|+|\rho-\rho_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这就是说(ρ_n)是个基本序列.

二、条件的充分性:分下面几个步骤证明.

1° 如果从某一个自然数开始所有的ρ_n都相等,(ρ_n)当然就

是有极限的．如果情况不是这样，则序列的任何一项后面总有与它不相同的另一项，为叙述方便起见，不妨假定对一切自然数 n 都有

$$\rho_n \neq \rho_{n+1}$$

由定理 5，对每个自然数 n，可以在 ρ_n 与 ρ_{n+1} 之间选取一个有理实数 $\bar{r}_n$．这样，相应地便得到了一个有理数序列(r_n)．我们将证明它是一个有理数基本序列，因而代表了一个实数 ρ，而(ρ_n)就以 ρ 为极限．

2° 现在证明上面所得的序列(r_n)是有理数基本序列．

对于任给的有理数 $\varepsilon>0$，因为(ρ_n)是基本序列，所以存在自然数 N，使当 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 时，有

$$|\rho_n-\rho_m|<\frac{\varepsilon}{3}$$

注意到对每个自然数 n 和 m，有

$$|\bar{r}_n-\rho_n|<|\rho_{n+1}-\rho_n|$$

和

$$|\bar{r}_m-\rho_m|<|\rho_{m+1}-\rho_m|$$

于是当 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 时便有

$$\begin{aligned}|r_n-r_m|=|\bar{r}_n-\bar{r}_m|&\leqslant|\bar{r}_n-\rho_n|+|\rho_n-\rho_m|+|\rho_m-\bar{r}_m|\\&\leqslant|\rho_{n+1}-\rho_n|+|\rho_n-\rho_m|+|\rho_{m+1}-\rho_m|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就是说(r_n)是一个有理数基本序列，把它所确定的实数记为 ρ．

3° 最后证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\rho$．

任给正实数 ε，由定理 6，$\lim\limits_{n\to\infty}\bar{r}_n=\rho$，故存在自然数 N_1，使当 $n\geqslant N_1$ 时有

$$|\bar{r}_n-\rho|<\frac{\varepsilon}{3}$$

由于(ρ_n)是基本序列，存在自然数N_2，使得当$n\geqslant N_2$和$m\geqslant N_2$时，便有

$$|\rho_n-\rho_m|<\frac{\varepsilon}{3}$$

取$N=\max(N_1, N_2)$，则当自然数$n\geqslant N$时便得

$$\begin{aligned}|\rho_n-\rho|&\leqslant|\rho_n-\rho_N|+|\rho_N-\bar{r}_N|+|\bar{r}_N-\rho|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+|\rho_N-\bar{r}_N|+\frac{\varepsilon}{3}<\frac{2\varepsilon}{3}+|\rho_N-\rho_{N+1}|\\&<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\rho$. 定理证毕.

实数域关于极限运算的完备性这一重要性质，还可以用许多别的方式去描述．下面我们把分析学中常见的几个其他形式列举于后.

定义 12 设(ρ_n)是一个实数序列，如果它满足

$$\rho_n\geqslant\rho_{n+1}\qquad(n=1, 2, \cdots)$$

则称它是递减的实数序列．如果它满足

$$\rho_n\leqslant\rho_{n+1}\qquad(n=1, 2, \cdots)$$

则称它是递增的实数序列．递减或递增的实数序列统称为单调的实数序列.

定理 8 单调有界的实数序列必有极限存在.(*)

证明 仅证明单调递增序列的情形.

设(ρ_n)是一个单调递增的有界实数序列，正实数M是它的一个界，则

$$\rho_n\leqslant\rho_{n+1}<M\qquad(n=1, 2, \cdots)$$

为了证明它有极限，只要证明它是一个基本序列即可．我们用反

(*) 关于有界实数序列的理解类似于定义 4.

证法. 假若不然，必有正实数 ε_0，使得对于任何自然数 N，都有一个自然数 n_N，同时满足

$$n_N > N \quad 和 \quad |\rho_{n_N} - \rho_N| \geqslant \varepsilon_0$$ (*)

这样，对 $N=1$，有自然数 n_1，使得

$$n_1 > 1 \quad 且 \quad |\rho_{n_1} - \rho_1| \geqslant \varepsilon_0$$

对 $N=n_1$，又有自然数 n_2，使得

$$n_2 > n_1 \quad 且 \quad |\rho_{n_2} - \rho_{n_1}| \geqslant \varepsilon_0$$

这样作下去，当 n_p 定下来以后，便有自然数 n_{p+1}，使得

$$n_{p+1} > n_p \quad 且 \quad |\rho_{n_{p+1}} - \rho_{n_p}| \geqslant \varepsilon_0$$

于是由数学归纳法可以得出一串自然数

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \cdots$$

满足

$$|\rho_{n_{p+1}} - \rho_{n_p}| \geqslant \varepsilon_0 \qquad (p=1, 2, \cdots)$$

注意到序列 (ρ_n) 的递增性，便得

$$\rho_{n_1} \geqslant \rho_1 + \varepsilon_0$$

$$\rho_{n_2} \geqslant \rho_{n_1} + \varepsilon_0 \geqslant \rho_1 - 2\varepsilon_0$$

一般的，将有

$$\rho_{n_p} \geqslant \rho_1 + p\varepsilon_0$$

由于 $\varepsilon_0 > 0$，所以由阿基米得公理，存在自然数 p_0，使得

$$p_0\varepsilon_0 > M + |\rho_1|$$

于是

$$\rho_{n_{p_0}} \geqslant \rho_1 + p_0\varepsilon_0 > \rho_1 + M + |\rho_1| \geqslant M$$

但这与序列 (ρ_n) 以 M 为上界是矛盾的，故 (ρ_n) 是一个基本序列. 证毕.

定义 13 设 α 和 β 是两个实数，一切满足不等式 $\alpha < x < \beta$ 的

(*) 假若不然，则有某个 N_0，使得 $n > N_0$ 都有 $|\rho_n - \rho_{N_0}| < \varepsilon_0$，于是当 $n > N_0$ 和 $m > N_0$ 时便有 $|\rho_n - \rho_m| \leqslant |\rho_n - \rho_{N_0}| + |\rho_{N_0} - \rho_m| < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$.

实数 x 组成的集合称为开区间，记作 (α,β). 即

$$(\alpha,\beta)=\{x\mid\alpha<x<\beta\}$$

一切满足不等式 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 的实数 x 组成的集合称为闭区间，记作 $[\alpha,\beta]$. 即

$$[\alpha,\beta]=\{x\mid\alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$$

开区间和闭区间统称为区间，α 和 β 称为区间的左、右端点. 差 $\beta-\alpha$ 称为区间的长度.

定义 14 一串区间

$$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n,\cdots$$

称为是一个区间套，如果它满足下列两个条件:

i) $\Delta_n\supset\Delta_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta_n|=0$, 其中 $|\Delta_n|$ 表示区间 Δ_n 的长度.

定理 9 (区间套定理) 若 (Δ_n) 是一个闭区间套，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ 是单点集.

证明 先证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n\neq\varnothing$. 设 $\Delta_n=[\alpha_n,\beta_n]\,(n=1,2,\cdots)$, 因为 $\Delta_n\supset\Delta_{n+1}\,(n=1,2,\cdots)$, 所以

$$\alpha_1\leqslant\alpha_n\leqslant\alpha_{n+1}<\beta_{n+1}\leqslant\beta_n\leqslant\beta_1$$

即 (α_n) 是单调递增的有界序列，根据定理 8, 它有极限 α. 由于对任何的自然数 k, 当 $n\geqslant k$ 时，都有

$$\alpha_k\leqslant\alpha_n\leqslant\beta_k$$

所以

$$\alpha_k\leqslant\alpha\leqslant\beta_k\qquad(k=1,2,\cdots)$$

这就是说 $\alpha\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k$.

再证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n=\{\alpha\}$. 假若不然，设还有 $\beta\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$, $\beta\neq\alpha$, 那末

由

$$\alpha_n \leqslant \alpha、\beta \leqslant \beta_n \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

便得

$$|\Delta_n| = \beta_n - \alpha_n \geqslant |\beta - \alpha| \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

这与$\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta_n|=0$是矛盾的，因此$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n=\{\alpha\}$. 定理证毕。

［**例 1**］ 开区间组

$$\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

组成一个区间套，但是

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta_n = \varnothing$$

这说明区间套定理中Δ_n都是闭区间这个条件是不可少的。

［**例 2**］ 闭区间组

$$\Delta_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

是组成一个区间套的：

因为有

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$$

$$> \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)^{(*)}$$

$$= 1+\frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

和

(*) 不难用数学归纳法证明下述贝努里（Bernoulli）不等式：$(1+x)^n \geqslant 1+nx$（当$x>-1$时）

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}$$

$$\geqslant\frac{n+1}{n+2}\left[1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right]^{(*)}$$

$$=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1$$

所以

$$\Delta_n\supset\Delta_{n+1}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

再估计 Δ_n 的长度. 由

$$|\Delta_n|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

$$=\frac{1}{n}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right]\leqslant\frac{1}{n}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\right]^{(**)}$$

$$<\frac{3}{n}$$

知 $\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta_n|=0$, 于是$(\Delta_n)$组成一个闭区间套. 据上述定理, 它应当"套住"一个实数. 在数学分析里, 可以证明这个实数就是自然对数的底 e. 这个例子说明, 如果仅限于有理数的范围, 那末一个有理数端点的闭区间套就可能套不住任何有理数. 以上是从区间套的角度刻划了有理数的不完备性和实数的完备性.

为了给出另一个关于实数完备性的描述, 我们先讲一下数集合上、下确界的概念.

定义 15 设M是一个实数集合, 如果存在一个实数 α, 使得

(*) 见 p. 79. 底注.

(**) 由数学归纳法易得 $n!\geqslant 2^{n-1}$.

对一切$x\in M$,都有

$$x\leqslant\alpha$$

则称M是有上界的实数集合,数α称为是M的一个上界;如果存在一个实数β,使得不等式

$$x\geqslant\beta$$

对一切$x\in M$都成立,则称M是有下界的实数集合,数β称为是M的一个下界. 既有上界又有下界的数集合称为是有界数集合.

显然,数集合M如果有上界α的话,它的上界就有无穷多个,因为任何大于α的数也都是M的上界.

定义 16 数集合M,如果存在最小上界α时,称α为M的上确界,记作

$$\alpha=\sup M$$

如果存在最大下界β时,称β为M的下确界,记作

$$\beta=\inf M$$

显然,上、下确界如果存在的话必然是唯一的. 同时,易证$\alpha=\sup M$的充分必要条件是

i) $x\leqslant\alpha \qquad (x\in M)$;

ii) 对任何正数ε,在M中必存在一点$x_\varepsilon\in M$,使得

$$x_\varepsilon>\alpha-\varepsilon$$

类似地,可以给出下确界的充分必要条件.

定理 10(确界存在定理) 有上界的非空实数集合必有上确界,有下界的非空实数集合必有下确界.

证明 设M是有上界的非空实数集合,β_1是它的一个上界,且$\beta_1\bar{\in}M$. 因为M非空,所以存在实数α_1,使$\alpha_1\in M$,于是$\alpha_1<\beta_1$,令

$$\Delta_1=[\alpha_1,\beta_1]$$

将Δ_1平分成两个区间,平分的中点γ_1不外乎两种情形:

若 γ_1 是M的上界，令 $\alpha_2=\alpha_1, \beta_2=\gamma_1$.

若 γ_1 不是M的上界，则令 $\alpha_2=\gamma_1, \beta_2=\beta_1$. 记

$$\Delta_2=[\alpha_2, \beta_2]$$

这时，β_2 是M的上界，而 Δ_2 中含有集合M的数，即 $\Delta_2\cap M\neq\varnothing$. 再将 Δ_2 平分成两个区间，类似的讨论可得

$$\Delta_3=[\alpha_3, \beta_3]$$

其中 β_3 是M的上界，且 $\Delta_3\cap M\neq\varnothing$. 这样作下去，将得出一串闭区间

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \cdots$$

它们的右端点都是数集合M的上界，且 $\Delta_n\cap M\neq\varnothing$. 因为按照我们的作法有

$$\Delta_n\supset\Delta_{n+1} \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

$$\lim_{n\to\infty}|\Delta_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_1-\alpha_1}{2^{n-1}}=0$$

所以这是一个闭区间套，由区间套定理，存在唯一的实数 α，使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta_n=\{\alpha\}$$

而

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n$$

我们来证明 $\alpha=\sup M$.

设 $x\in M$，则由

$$x\leqslant\beta_n \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

得

$$x\leqslant\lim_{n\to\infty}\beta_n=\alpha$$

所以 α 是M的上界. 任给正数 ε，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$，可找到自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时有

$$\alpha-\varepsilon<\alpha_n$$

由于 $\Delta_N \cap M \neq \varnothing$，必有 $x_0 \in M$，使得

$$x_0 \geqslant \alpha_n$$

因此

$$x_0 > \alpha - e$$

这就是说，比 α 小的数都不再是 M 的上界，故 α 是 M 的最小上界.
证毕.

考虑实数集合

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \middle| n=1,2,\cdots\right\}$$

便知道确界存在定理限制在有理数范围内是不成立的. 这便从确界的角度描述了有理数的不完备和实数的完备性.

最后，我们证明全体实数填满了整条直线，这是解析几何从而也是整个近代数学的一个基本出发点. 所谓实数填满了整条直线，就是说，如果把实数铺在直线上，随便在直线上砍一刀，一定能砍中一个实数. 用数学语言来说，就是把全体实数分成两部分，分界的地方一定有一个实数，它属于这两部分之一.

定义 17 设将全体实数 R 分成两部分 A 和 B，使之满足下列条件：

i) $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$；

ii) $A \cup B = R$；

iii) 若 $\alpha \in A, \beta \in B$，则 $\alpha < \beta$，

集合偶 (A, B) 称为实数 R 的一个**分划**，A 称为这个分划的**下类**，B 称为它的**上类**.

例 3 若令

$$A = \{\rho \mid \rho < 1\}$$
$$B = \{\rho \mid \rho \geqslant 1\}$$

则 (A, B) 是一个实数分划.

［例 4］ $A=\{\rho|\rho$ 是负实数、零、或平方小于 2 的实数$\}$

$B=\{\rho|\rho$ 是不属于 A 的实数$\}$

不难验证(A,B)是个实数分划.

定理 11（戴德金连续性定理） 设(A,B)是一个实数分划，则或者 A 有最大数，或者 B 有最小数，两者必居且仅居其一.

证明 因为 $B\neq\varnothing$，由条件 i)和 iii)，A 是有上界的非空实数集合. 根据定理 10，$\sup A=\omega$ 存在. 若 $\omega\in A$，则 ω 就是 A 的最大数，否则，ω 就是 B 的最小数. 证毕.

定理 11 告诉我们，任何一个实数分划都可以由一个实数来产生，大于该数的实数在上类中，小于该数的实数在下类中，至于该数，则属于两类之一. 如果类似于定义 17 去考虑全体有理数的分划，那末情形就不一样了，并不是任何有理数分划都可以由一个有理数产生出来，读者试研究下面这个有理数分划：

$A=\{r|r$ 是负有理数、零或平方小于 2 的正有理数$\}$

$B=\{r|r$ 是不属于 A 的有理数$\}$

证明 A 里不存在最大数，B 里也不存在最小数. 因此，定理 11 乃是从分划的观点刻划了有理数的不完备和实数的完备性. 1872 年，德国数学家戴德金正是从这个角度去建立整个实数理论. 关于这部分内容，读者可以阅读本书第四章.

定理 7 到定理 11 从不同的角度论证了实数的完备性，实际上，它们是互相等价的. 细心的读者会发现，我们在这些定理的次序安排上是使得后一个定理的证明只须用到前一个定理的结论，因此，只要能用连续性定理去证明柯西准则，那末便得出这组定理的等价性了，有兴趣的读者不妨一试.

习　　题

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\rho$，则对任何 σ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}|\rho_n-\sigma|=|\rho-\sigma|$。

2. 设 a 是正实数，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\rho$，则 $\sup\limits_{m}\inf\limits_{n\geq m}\rho_n=\rho$.

4. 证明实数序列 $\rho_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin k}{k!}(n=1,2,\cdots)$ 的极限存在.

5. 证明任两个实数间必有一无理数.

6. 证明任何实数都是某一个有理数集合的上确界.

7. 试利用连续性定理证明柯西准则.

8. 你能否从有理数出发利用区间套过程构造实数系统?

第四章　实数的戴德金(Dedekind)构造

在上面一章，我们业已从数域的完备性要求出发，用有理数序列的等价类建立了康托尔实数，从而完成了对极限运算封闭的完备数域的构造. 本章我们将从另一角度，即从数域的连续性要求出发，用有理数分割来建立实数(即所谓戴德金实数)，从而完成了数轴上的一个连续无隙的数域的构造. 这两种不同方法建立起来的实数是等价的.

本章首先将给出戴德金实数的定义，接着定义实数的序. 然后对仅仅有了序(但尚无距离)的实数，证明有关连续性和完备性的全部定理. 关于实数的代数运算及性质，则通过建立戴德金实数与康托尔实数间的保序同构来得到.

对于初学的读者来讲，阅读本章的内容，可能会遇到一定的困难，但读者也可能从中获得某些有益的训练. 关于戴德金分划理论的基本阐述，我们建议读者参阅：菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》的第一卷第一分册的绪论部分.

§1　戴德金实数的定义

定义 1(戴德金实数)　设 Q 是全体有理数的集合，$\varnothing$ 是空集合，X 是 Q 的一个子集. 如果 X 满足以下三个条件：

i)　$\varnothing \neq X \neq Q$;

ii)　若 $r \in X$, $r' \in Q$, $r' < r$, 则 $r' \in X$;

iii)　若 $r \in X$, 则必有 $r'' \in X$, 使得 $r < r''$;

则称 X 是一个实数.

按照实数的上述定义，一个实数就是一个有理数组成的集合，但这个有理数集必须具备这样一些性质：它既非空集，又非全体有理数的集，即这个集合至少含有一个有理数，又至少有一个有理数不属于它(条件 i))；如果一数属于该集，那末凡是比这个数还要小的有理数都属于该集(条件 ii))；凡属于该集的有理数都不是这个集合中的最大数，即这个集合没有最大数(条件 iii)).

［例 1］ 设 E 是由小于 1 的所有有理数组成的集合，即

$$E=\{r\in Q \mid r<1\}$$

容易验证，有理数集 E 满足条件 i)、ii)、iii)．从而按定义 E 是一个实数.

［例 2］ 设 A 是由所有负有理数、数 0 及所有平方小于 2 的正有理数组成的集合，即

$$A=\{r\in Q \mid r<0 \text{ 或 } r^2<2\}$$

则有理数集 A 满足条件 i)、ii)、iii)，从而按定义 A 是一个实数.

A 满足条件 i)和 ii)是容易验证的．现验证它满足条件 iii)：

设 $r>0$ 且 $r\in A$，于是由 $r^2<2$，有 $\dfrac{2r+1}{2-r^2}>0$，而由阿基米得公理，可取一个正整数 k_0，使得 $k_0>\dfrac{2r+1}{2-r^2}$，因而有 $2-r^2>\dfrac{2r+1}{k_0}=\dfrac{2r}{k_0}+\dfrac{1}{k_0}$，即有

$$2>r^2+\frac{2r}{k_0}+\frac{1}{k_0}\geqslant\left(r+\frac{1}{k_0}\right)^2$$

因此 $r+\dfrac{1}{k_0}\in A$ 且 $r+\dfrac{1}{k_0}>r$，于是 A 满足条件 iii).

在以上两例中，有理数集合 E 和 A 都满足条件 i)、ii)、iii)，所以按定义，E 和 A 都是实数．然而，在它们的余集合 $Q\backslash E$ 和 $Q\backslash A$ 中，却有不同的情况：在集合 $Q\backslash E$ 中有最小数，这个最小数就是有理数 1；而在集合 $Q\backslash A$ 中却没有最小数，这可以用证明 A 中无

最大数的类似方法去验证它.

一般地说，设 X 是一个实数，即 X 是满足条件 i)、ii)、iii) 的有理数集合，那末在馀集合 $Q\backslash X$ 中可能有最小数，也可能没有最小数. 以上两例表明：这两种逻辑上的可能情况，在实际中确实都存在. 这样，我们可以按照馀集合 $Q\backslash X$ 中有无最小数的不同，把实数分成两类：属于第一类的实数 X，在馀集合 $Q\backslash X$ 中有最小数；属于第二类的实数 X，在馀集合 $Q\backslash X$ 中没有最小数.

现在我们来证明以下命题：

命题 1 X_0 是一个第一类实数的充分必要条件是：存在有理数 r_0，使得 X_0 恰好是由小于 r_0 的所有有理数组成的集合，即存在有理数 r_0，使得

$$X_0=\{r\in Q\,|\,r<r_0\} \tag{1}$$

证明 必要性：如果 X_0 是一个第一类实数，那末馀集合 $Q\backslash X_0$ 中就有最小数，记 $Q\backslash X_0$ 中的最小数为 r_0. 于是对任意的有理数 $r<r_0$，就有 $r\bar{\in}Q\backslash X_0$，即有 $r\in X_0$. 因此有 $\{r\in Q\,|\,r<r_0\}\subseteq X_0$. 而对任意的有理数 $r\geqslant r_0$，由于 X_0 满足条件 ii) 且 $r_0\bar{\in}X_0$，故有 $r\bar{\in}X_0$. 因此 $X_0\subseteq\{r\in Q\,|\,r<r_0\}$. 从而等式(1)成立.

充分性：如果 X_0 是形如(1)式的有理数集，则容易验证 X_0 满足条件 i)、ii)、iii) 且 r_0 是馀集合 $Q\backslash X_0$ 的最小数. 所以 X_0 是一个第一类实数.

这样，对每个有理数 r_0，由(1)式确定了一个第一类实数 X_0；反之，对每个第一类实数 X_0，有唯一的一个有理数 r_0，使得(1)式成立. 因此，(1)式给出了全体有理数与全体第一类实数之间的一个一一对应. 记与有理数 r 对应的第一类实数为 $X(r)$，即

$$X(r)=\{s\in Q\,|\,s<r\} \tag{2}$$

并称 $X(r)$ 为**有理实数**；同时，第二类实数称为**无理实数**. 全体实数的集合将记作 $\mathscr{R}$.

习　题

1. 证明：

(1) 有限个满足条件 i)、ii)、iii)的有理数集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的和集 $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ 与交集 $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ 仍是满足条件 i)、ii)、iii)的有理数集.

(2) 无限多个满足条件 ii)、iii)的有理数集的和集满足条件 ii)和 iii).

(3) 无限多个满足条件 ii)的有理数集的交集满足条件 ii).

2. 证明：有理数集合 $X=\{r\in Q \mid r<0$ 或 $r^2<3\}$ 定义了一个第二类实数.

3. 证明：有理数集合 $X=\{r\in Q \mid$ 存在 n，使得 $r<r_n\}$ 是一个第二类实数，其中有理数序列 $\{r_n\}$ 分别为：

(1) $r_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$　$(n=1, 2, \cdots)$

(2) $r_n=\frac{1}{2^{1\cdot 2}}+\frac{1}{2^{2\cdot 3}}+\cdots+\frac{1}{2^{n(n+1)}}$　$(n=1, 2, \cdots)$

4. 设 X 是一个有理数集合，即 $X\subseteq Q$，Y 是 X 的余集合，即 $Y=Q\setminus X$. 证明：

(1) “X 满足条件 i)”等价于“Y 满足条件 i)”.

(2) “X 满足条件 ii)”等价于“对每个 $r\in X$ 和对每个 $r'\in Y$，都有 $r<r'$”，又等价于“Y 满足下面的条件 iv)：

iv) 若 $r\in Y$，$r<r'\in Q$，则 $r'\in Y$.

(3) 若 X 是一个实数，即 X 满足条件 i)、ii)和 iii)，则 $Y=Q\setminus X$ 除满足条件 i)和 iv)外，还可能满足(下面的)条件 v)：

v) 若 $r\in Y$，则必有 $r'\in Y$，使得 $r'<r$.

并且当且仅当 X 不满足条件 iii)或 X 是第二类实数时，Y 满足条件 i)、iv)、v).

5. 设 A、B 是任意给定的两个非空有理数集合，满足

$$A=\{r\in Q \mid 若\ r'\in B，则\ r\leqslant r'\}$$

$$B=\{r'\in Q \mid 若\ r\in A，则\ r\leqslant r'\}$$

证明：(1) A 满足条件 i)和 ii)，B 满足条件 i)和 iv)；

(2) A 满足条件 iii)当且仅当 B 满足条件 v). (*)

(*) 可以把实数定义作以下修改：称满足本题条件的有理数集 A、B 组成的序偶 (A, B) 为一个有理数分划. 而把每一个有理数分划定义为一个戴德金实数. 这样，每个第一类实数对应着一个 A 不满足条件 iii)或 B 不满足条件 v)的分划 (A, B)，而每个第二类实数对应着一个 A 满足条件 iii)或 B 满足条件 v)的分划 (A, B).

§2 实数的序

戴德金实数作为有理数的集合，它的顺序关系(序的定义见第一章§4)可以由集合的包含关系来定义：

定义 2 设X和Y是两个任意的实数. 如果集合的包含关系$X\subseteq Y$成立，则记作$X\leqslant Y$(或记作$Y\geqslant X$)，并称实数X不大于实数Y(或称实数Y不小于实数X).

实数的顺序关系具有以下性质：

(I.1) 若$X\leqslant Y, Y\leqslant Z$，则$X\leqslant Z$;

(I.2) 若$X\leqslant Y$和$Y\leqslant X$，则$X=Y$;

(I.3) 对任意两个实数X和Y，必有$X\leqslant Y$或$Y\leqslant X$成立.

性质(I.1)和(I.2)可由定义2立即推出. 现证性质(I.3)：根据顺序关系的定义，需证包含关系$X\subseteq Y$和$Y\subseteq X$至少成立其中之一. 倘若包含关系$Y\subseteq X$不成立，就应有有理数r'，使得$r'\in Y$，且$r'\notin X$. 于是对任意的有理数r，如果$r\in X$，则由X满足条件ii)，可推出$r<r'$. 而由Y满足条件ii)和$r'\in Y$，就得到$r\in Y$. 因此$X\subseteq Y$. (顺便指出，在这里我们仅仅利用了条件ii)).

定义 2' 如果$X\leqslant Y$ (或$Y\geqslant X$) 且$X\neq Y$，则记作$X<Y$(或$Y>X$)，并读作"X小于Y"(或"Y大于X").

这样，显然有：

"$X\leqslant Y$"与"$X<Y$或$X=Y$"等价. 同样地，"$Y\geqslant X$"与"$Y>X$或$Y=X$"等价. 并且由以上性质(I.1—3)，可以推出以下两个性质：

(I.1') 对任意两个实数X和Y，以下三种关系必有且仅有其中之一成立：

$$X<Y,\quad X=Y,\quad Y<X$$

(I.2') 若$X<Y, Y<Z$，则$X<Z$.

性质(I.1')的证明：如果 $X<Y$ 和 $X=Y$ 都不成立，那末 $X\leqslant Y$ 不成立且 $X\neq Y$，于是由性质(I.3)就有 $Y\leqslant X$ 且 $X\neq Y$，从而有 $Y<X$. 故三种关系至少成立其中之一. 另外，如果有 $X<Y$，即有 $X\leqslant Y$ 且 $X\neq Y$，于是由(I.2)，$Y\leqslant X$ 和 $X=Y$ 都不成立，故 $Y<X$ 和 $X=Y$ 都不成立. 同样地，如果 $Y<X$，则 $X<Y$ 和 $X=Y$ 都不能成立. 如果 $X=Y$，则按定义，$X<Y$ 和 $Y<X$ 都不成立. 因此三种关系至多成立其中之一.

性质(I.2')的证明：若 $X<Y, Y<Z$，则有 $X\leqslant Y, Y\leqslant Z$，于是由(I.1)，有 $X\leqslant Z$. 而由(I.1')，又有 $X\neq Z$. 于是 $X<Z$.

这里的性质(I.1'—2')是用"$<$"关系的定义和性质(I.1—3)来证明的. 显然，性质(I.1'—2')本来是可以根据实数和实数顺序的定义直接验证的. 还需要指出，根据"$X\leqslant Y$"等价于"$X<Y$ 或 $X=Y$"，由性质(I.1'—2')也可以推出性质(I.1—3).

习　题

1. 根据"$X<Y$"与"$X\leqslant Y$ 且 $X\neq Y$"等价，证明：性质(I.1—3)与性质(I.1'—2')等价.

2. 仅利用实数顺序关系的性质(I.1—3)，证明：凡数列(x_n)都有单调的子序列.

(提示：不妨设序列(x_n)的项是两两不相同的.)

§3　确界存在定理　连续性定理

有了实数顺序概念以后，就可以用第三章定义 15 和 16 的叙述方式引入实数集合 $\mathscr{X}$ 的上(下)界和上(下)确界的概念(*). 容易证明：实数 B_0 是实数集合 $\mathscr{X}$ 的上确界的充分必要条件是以下两个条件得以满足：

(*)　本章中涉及的一些概念，凡是不另外强调的，其含意均与第三章相同.

1) 对每个 $X\in\mathfrak{X}$，都有 $X\leqslant B_0$;

2) 对每个实数 $A<B_0$，必存在实数 $X_0\in\mathfrak{X}$，使得 $A<X_0$.

类似地，可以给出实数集合 $\mathfrak{X}$ 的下确界的充分必要条件.

由有限个实数组成的实数集合 $\mathfrak{X}$ 必有最大数和最小数，这最大数和最小数分别就是集合 $\mathfrak{X}$ 的上确界和下确界. 一般地说，如果实数集合 $\mathfrak{X}$ 中有最大(小)数，那末这个最大(小)数就是集合 $\mathfrak{X}$ 的上(下)确界. 但是，由无限多个实数组成的实数集合 $\mathfrak{X}$ 未必有最大(小)数(与 § 1 的习题第 1 题比较).

定理 1（确界存在定理） 非空的有上界的实数集合必有上确界.

证明 设 $\mathfrak{X}$ 是一个非空的有上界的实数集合，对 $\mathfrak{X}$ 的任一上界 B，不等式

$$X\leqslant B$$

对一切 $X\in\mathfrak{X}$ 都成立. 根据实数及其顺序的定义，对任意的 $X\in\mathfrak{X}$ 都有

$$X\subseteq B$$

令

$$B_0=\bigcup_{X\in\mathfrak{X}}X$$

则 $B_0\subseteq B$.

首先证明，B_0 是一个实数，即 B_0 是满足条件 i)、ii) 和 iii) 的有理数集. B_0 显然是一个有理数集. 因为 $\mathfrak{X}$ 非空且有上界，故有实数 $X_0\in\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{X}$ 的上界 B，使得 $X_0\subseteq B_0\subseteq B$，由于 X_0 和 B 都满足条件 i)，故 B_0 也满足条件 i). 对任意的 $r\in B_0$，由和集的定义，有 $X_1\in\mathfrak{X}$，使得 $r\in X_1$，由于 X_1 满足条件 ii) 和 iii)，故对每个有理数 $r'<r$，有 $r'\in X_1$，且存在有理数 $r_0>r$，使得 $r_0\in X_1$；于是由 $X_1\subseteq B_0$，有 $r'\in B_0$ 和 $r_0\in B_0$. 所以 B_0 也满足条件 ii) 和 iii). 从而 B_0 是一

个实数.

其次证明，B_0 是 $\mathfrak{X}$ 的上确界. 因为对任意的 $X\in\mathfrak{X}$，都有

$$X\subseteq B_0，\quad 即\quad X\leqslant B_0$$

所以 B_0 是实数集合 $\mathfrak{X}$ 的上界；而对于 $\mathfrak{X}$ 的任意的一个上界 B，则由 $B_0\subseteq B$，有 $B_0\leqslant B$，所以 B_0 是 $\mathfrak{X}$ 的最小上界(即上确界). 定理证毕.

类似地，可以证明:

定理 1′ 非空的有下界的实数集合必有下确界.

事实上，由非空的有下界的实数集合 $\mathfrak{X}$ 可以作一个有理数集 A_0，使得 A_0 等于所有属于 $\mathfrak{X}$ 的有理数集 X 的交集. 由 $\mathfrak{X}$ 非空且有下界，故交集 A_0 满足条件 i)，而由 $\mathfrak{X}$ 中的所有 X 都满足条件 ii)，故交集 A_0 也满足条件 ii). 如果交集 A_0 中没有最大的有理数，那末交集 A_0 还满足条件 iii)；如果交集 A_0 中有最大的有理数，那末从集合 A_0 中去掉这个最大数后，所得到的集合 $\mathring{A}_0$，除了仍然满足条件 i)和 ii)以外，还满足条件 iii). 所以 A_0(或者 $\mathring{A}_0$)是一个实数. 并且还可以类似地证明，A_0(或 $\mathring{A}_0$)是集合 $\mathfrak{X}$ 的下确界. 证明细节，请读者完成.

综合定理 1 和定理 1′，我们得到:

定理 1″ 非空的有界的实数集合必有上确界和下确界.

这个定理刻划了实数与有理数的基本区别. 在有理数范围内，同样可以有有理数集的上界和上确界概念，但一般来说，非空的有上界的有理数集未必有有理数的上确界. 如例 2 中的集合 A 是非空的有上界的有理数集，但任意一个有理数都不是 A 的上确界. 这说明在有理数范围内，确界存在定理并不成立.

下面，我们再来证明一个定理——实数的连续性定理. 从这个定理的叙述中，我们同样地可以看到实数与有理数的基本区别.

定理 2(实数的连续性定理) 设 $\mathscr{R}$ 是全体实数的集合，如果

$\mathfrak{X}$ 是满足以下三个条件的实数集合：

1°) $\varnothing \neq \mathfrak{X} \neq \mathscr{R}$;

2°) 若 $X \in \mathfrak{X}, X' \in \mathscr{R}, X' < X$, 则 $X' \in \mathfrak{X}$;

3°) 若 $X \in \mathfrak{X}$, 则存在 $X' \in \mathfrak{X}$, 使得 $X < X'$, 那末在余集合 $\mathscr{R} \backslash \mathfrak{X}$ 中必有最小数.

证明 由条件 1°, 集合 $\mathfrak{X}$ 非空且有不属于 $\mathfrak{X}$ 的实数；而由条件 2°, 不属于 $\mathfrak{X}$ 的任意实数 B(即 $B \in \mathscr{R} \backslash \mathfrak{X}$)一定是 $\mathfrak{X}$ 的上界. 因此, $\mathfrak{X}$ 是非空的有上界的实数集合. 于是根据定理 1, 集合 $\mathfrak{X}$ 存在上确界 B_0. 由条件 3°, $B_0 \overline{\in} \mathfrak{X}$, 即 $B_0 \in \mathscr{R} \backslash \mathfrak{X}$; 而由于对任意的 $B \in \mathscr{R} \backslash \mathfrak{X}$, B 都是 $\mathfrak{X}$ 的上界, 故 $B_0 \leqslant B$. 所以 B_0 是 $\mathscr{R} \backslash \mathfrak{X}$ 的最小数. 证毕.

定理 2 指出, 在实数集合 $\mathscr{R}$ 范围内, 满足条件 1°、2°、3° 的实数集合 $\mathfrak{X}$ 的余集合 $\mathscr{R} \backslash \mathfrak{X}$ 中一定有最小数. 这一事实在有理数范围内是不成立的. 在有理数范围内满足条件 i)、ii)、iii) 的有理数集合 X 的余集合 $Q \backslash X$ 中可能有最小数、也可能没有最小数. 它说明：从顺序上去看, 有理数是有“孔隙”的, 而实数是没有“孔隙”的. 所以定理 2 称为实数的连续性定理.

定理 3 设 $\{[A_n, B_n] | n=1, 2, \cdots\}$ 是一串闭区间, 且满足条件 $[A_n, B_n] \supseteq [A_{n+1}, B_{n+1}]$, $(n=1, 2, \cdots)$, 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n, B_n] \neq \varnothing$$

证明 由假设对每个自然数 n, 都有 $[A_n, B_n] \supseteq [A_{n+1} B_{n+1}]$, 所以当自然数 $n \leqslant m$ 时, 有 $[A_n, B_n] \supseteq [A_m, B_m]$, 即有 $A_n \leqslant A_m \leqslant B_m \leqslant B_n$. 由此就有 $A_n \leqslant B_m$ 和 $A_m \leqslant B_n$. 因此, 不等式 $A_n \leqslant B_m$ 对任意的自然数 n 和 m 都成立. 于是每个 B_m 都是集合 $\mathfrak{X} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$ 的上界. 故根据定理 1, 集合 $\mathfrak{X}$ 有上确界 X_0. 因此, 对每个自然数 n, 由 $A_n \in \mathfrak{X}$, 有 $A_n \leqslant X_0$, 并由 B_n 是 $\mathfrak{X}$ 的上界, 又有

$X_0 \leqslant B_n$. 所以对每个自然数 n, 都有 $A_n \leqslant X_0 \leqslant B_n$, 即有 $X_0 \in [A_n, B_n]$, $(n=1, 2, \cdots)$. 从而有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n, B_n] \neq \varnothing$$

习　题

1. 利用定理 2 证明定理 1'.

2. 设$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是满足以下条件的两个非空实数集合:

$$\mathscr{A} = \{X \in \mathscr{R} \mid 对每个\ X' \in \mathscr{B}, 都有\ X \leqslant X'\}$$
$$\mathscr{B} = \{X' \in \mathscr{R} \mid 对每个\ X \in \mathscr{A}, 都有\ X \leqslant X'\}$$

根据实数的定义证明: 交集 $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ 是单点集.

(提示: 考虑有理数集 $X_0 = \bigcup_{X \in \mathscr{A}} X$)

3. 由题 2 的结果可证定理 1'和定理 2, 也可证明定理 3.

4. 如果集合$\mathscr{K}$包含在一族集合 $\mathscr{O}_t (t \in T)$的和集内, 即 $\mathscr{K} \subseteq \bigcup_{t \in T} \mathscr{O}_t$, 则称集合$\mathscr{K}$被集合族$\{\mathscr{O}_t \mid t \in T\}$所覆盖. 证明以下有限覆盖定理:

如果一个闭区间$[A, B]$被一族开区间$\Omega = \{\mathscr{O}_t \mid 对每个\ t \in T, \mathscr{O}_t 是一个开区间\}$所覆盖, 则在族$\Omega$中有有限个开区间 $\mathscr{O}_{t_1}, \mathscr{O}_{t_2}, \cdots, \mathscr{O}_{t_k}$, 使得有限开区间族$\{\mathscr{O}_{t_1}, \mathscr{O}_{t_2}, \cdots, \mathscr{O}_{t_k}\}$也覆盖闭区间$[A, B]$.

(提示: 不妨设族Ω中的每一个开区间$\mathscr{O}_t$都包含在某个固定的有界区间内. 考虑实数集合 $\mathscr{B}$: $\mathscr{B} = \{C \in \mathscr{R} \mid 闭区间[A, C]被\Omega中有限个开区间所覆盖\}$, 并利用定理 1.)

§4　几个辅助性质

实数的顺序与有理数的顺序之间的密切联系, 可由以下几个辅助性质来描述, 这些性质在下面将经常用到.

性质(F)　设X是个实数, r是个有理数, $X(r)$是由§1 中(2)式确定的有理实数, 则"$r_0 \bar{\in} X$"与"$X \leqslant X(r_0)$"等价; "$r_0 \in X$"与"$X(r_0) < X$"等价; 特别地"$r_1 < r_2$"与"$X(r_1) < X(r_2)$"等价.

证明　由于X满足条件 ii), 所以"$r_0 \bar{\in} X$" 等价于"对每个有理

数 $r \in X$，有 $r < r_0$”．由(2)式，即等价于“$X \subseteq X(r_0)$”．于是按实数顺序的定义，又等价于“$X \leqslant X(r_0)$”．因此“$r_0 \bar{\in} X$”等价于“$X \leqslant X(r_0)$”．根据实数顺序性质(I, 1′)，由“$r_0 \bar{\in} X$”等价于“$X \leqslant X(r_0)$”，可得“$r_0 \in X$”等价于“$X(r_0) < X$”．特别地，如果 $r_1 = r_0, X = X(r_2)$，则有“$r_1 < r_2$”等价于“$X(r_1) < X(r_2)$”．

“$r_1 < r_2$”与“$X(r_1) < X(r_2)$”等价表明：有理数 r 与根据(2)式确定的有理实数 $X(r)$ 之间的一一对应保持顺序不变．因此，如果把有理数 r 和与之对应的有理实数 $X(r)$ 等同看待，有理数就是实数的一部分．性质(F)反映了有理数顺序与实数顺序之间的基本联系．

性质(D) 设 X 和 Y 是两个任意的实数，如果 $X < Y$，则必有有理实数 $X(r_0)$，使得 $X < X(r_0) < Y$．

证明 由 $X < Y$，故有有理数 r'，使得 $r' \in Y$ 且 $r' \bar{\in} X$．由 Y 满足条件 iii)，又有有理数 $r_0 > r'$，使得 $r_0 \in Y$．于是由性质(F)，有 $X \leqslant X(r') < X(r_0) < Y$．

性质(D)表明，在任意两个不同的实数之间必有有理实数．这个性质称为有理实数在实数中的稠密性．

利用有理数满足阿基米得公理，还可以证明：

性质(A) 设 X 是一个任意的实数，ε 是一个任意的正有理数，那末必有唯一的整数 k_0，使得

$$X(k_0\varepsilon) < X \leqslant X((k_0+1)\varepsilon)$$

证明 由实数的条件 i)，有有理数 r_1 和 r_2，使得 $r_1 \in X$ 和 $r_2 \bar{\in} X$．由于有理数满足阿基米得公理，故对正有理数 ε，存在整数 k 和 l(*)，分别有 $k\varepsilon < r_1$ 和 $l\varepsilon > r_2$．而由条件 ii)，有 $r_1 < r_2$，从而

(*) 事实上，当 $r_1 \geqslant 0$ 时，取 $k = -1$，就有 $k\varepsilon < r_1$；而当 $r_1 < 0$ 时，由阿基米得公理，有自然数 n，使得 $n\varepsilon > (-r_1)$，于是取 $k = -n$，就有 $k\varepsilon < r_1$．类似地可证，存在整数 l，使得 $r_2 < l\varepsilon$．

$k<l$. 而在 $l-k+1$ 个整数 $k, k+1, \cdots, l-1, l$ 中必有一个整数 k_0, 使得 $k_0\varepsilon\in X$, 而$(k_0+1)\varepsilon\overline{\in}X$. 显然, 由条件 ii), 这样的整数 k_0 是唯一的. 于是由性质(F), 就得到不等式 $X(k_0\varepsilon)<X\leqslant X((k_0+1)\varepsilon)$.

性质(A') 设X是一个任意的实数, ε 是一个任意的正有理数, 则必有有理数 r_0, 使得

$$X(r_0)<X<X(r_0+\varepsilon)$$

事实上, 对有理数 $\varepsilon>0$, 令 $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{2}$, 则 ε_0 是正有理数, 故由性质(A), 有整数 k_0, 使得

$$X(k_0\varepsilon_0)<X\leqslant X((k_0+1)\varepsilon_0)<X((k_0+2)\varepsilon_0)$$

于是令 $r_0=k_0\varepsilon_0$, 就有

$$X(r_0)<X<X(r_0+\varepsilon)$$

习　　题

1. 证明: 不存在最大的实数, 也不存在最小的实数.
2. 证明: 任意两个有理实数之间必有无理实数.
3. 证明性质(A)与以下性质等价: 设X是任意给定的一个实数, ε 是一个任意的正有理数, 那末必有唯一的整数 k_0, 使得 $X(k_0\varepsilon)\leqslant X<X(k_0+1)\varepsilon)$.

§5　实数序列的极限

定义 3　设(X_n)是一个实数序列, X_0 是一个实数, 如果成立以下两条件:

(α) 对任意的实数 $A<X_0$, 都存在自然数 $N=N(A)$, 使得当自然数 $n\geqslant N$ 时, 有 $A<X_n$;

(β) 对任意的实数 $B>X_0$, 都存在自然数 $N'=N'(B)$, 使得当自然数 $n\geqslant N'$ 时, 有 $X_n<B$.

则称实数序列(X_n)是以 X_0 为极限的收敛序列. 记作

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_0$$

根据§4的辅助性质(D)，在上述收敛序列的定义的叙述中，如果把"对任意的实数$A<X_0$"改为"对任意的有理实数$A<X_0$"，而把"对任意的实数$B>X_0$"改为"对任意的有理实数$B>X_0$"，则定义的含义不变(读者可自行验证).

命题2 收敛的实数序列是有界的.

证明 设(X_n)是以X_0为极限的收敛实数序列. 取定两个实数A_0和B_0，使得$A_0<X_0$和$X_0<B_0$（根据实数的定义和性质(F)，A_0和B_0可取作有理实数). 于是由条件(α)和条件(β)，存在自然数N和N'，使得当$n\geqslant N$时，有$A_0<X_n$，而当$n\geqslant N'$时，有$X_n<B_0$. 令A_1为有限个实数$X_1, X_2, \cdots, X_{N-1}, A_0$中的最小数，而令$B_1$为有限个实数$X_1, X_2, \cdots, X_{N'-1}, B_0$中的最大数，则不等式$A_1\leqslant X_n\leqslant B_1$对一切自然数$n$都成立. 因此，实数序列$(X_n)$是有界的.

命题3 任一实数序列至多有一个极限.

证明 用反证法，倘若某个实数序列(X_n)有两个不同的极限X_0和X_0'. 不妨设$X_0<X_0'$，由性质(D)，有实数C_0，使得$X_0<C_0<X_0'$. 于是由X_0'是序列(X_n)的极限和$C_0<X_0'$，故根据条件(α)，存在自然数N，使当$n\geqslant N$时，有$C_0<X_n$. 而由X_0是序列(X_n)的极限和$X_0<C_0$，根据条件(β)，又存在自然数N'，使当$n\geqslant N'$时，有$X_n<C_0$. 这样，当自然数$n\geqslant \max(N, N')$时，就有$C_0<X_n$和$X_n<C_0$，这与顺序的性质(I, 1')矛盾，所以有两个不同的极限的实数序列(X_n)是不存在的. 证毕.

定理4 单调有界的实数序列必有极限.

证明 只证单调递增的情形. 单调递减情形的证明是类似的.

设(X_n)是单调递增的有界实数序列. 则由序列(X_n)有界，存在实数B_1，使得对每个自然数n，都有$X_n\leqslant B_1$. 因此，集合$\mathfrak{X}=$

$\{X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots\}$是以 B_1 为其上界的非空实数集合. 根据定理 1, 集合 $\mathscr{X}$ 有上确界 $X_0=\sup\mathscr{X}$. 现证明: X_0 是序列(X_n)的极限.

对任意的实数 $A<X_0$, 由 X_0 是集合 $\mathscr{X}$ 的上确界, 故存在自然数 N, 使得 $X_N\in\mathscr{X}$ 且 $A<X_N$. 而由假设, 序列(X_n)是单调递增的, 于是当 $n\geqslant N$ 时, 有 $A<X_N\leqslant X_n$, 所以条件(α)成立.

对任意的实数 $B>X_0$, 由于 X_0 是集合 $\mathscr{X}$ 的上界, 故对每个自然数 n, 都有 $X_n\leqslant X_0$. 于是不等式 $X_n<B$, 对一切自然数 n 都成立. 这样, 条件(β)也成立.

因此, 由序列极限的定义, X_0 是序列(X_n)的极限. 定理证毕.

从定理 4 的证明, 可得以下推论:

推论 有界单调递增(递减)序列的极限就是由序列的项组成的集合的上(下)确界.

下面, 我们再来给出一个关于实数和有理实数之间联系的辅助性质:

性质(C) 任一实数都是某个单调递增(递减)的有理实数序列的极限.

证明 设 X_0 是任意给定的一个实数. 对每个自然数 n, 取正有理数$\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}$, 根据性质(A), 有唯一的整数 k_n, 使得

$$X\left(\frac{k_n}{2^n}\right)<X_0\leqslant X\left(\frac{k_n+1}{2^n}\right) \tag{1}$$

于是由性质(F), 对每个自然数 n, 有 $\frac{k_n}{2^n}<\frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}$, 从而由 $\frac{k_n}{2^n}=\frac{2k_n}{2^{n+1}}$, 有 $2k_n<k_{n+1}+1$. 但由于 k_n 和 $k_{n+1}+1$ 都是整数, 故有 $2k_n\leqslant k_{n+1}$. 因此, 对每个自然数 n, 有$\frac{k_n}{2^n}\leqslant\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}$.

类似地, 由$\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}<\frac{k_n+1}{2^n}$可推出: 对每个自然数 n, 有

$$\frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}\leqslant\frac{k_n+1}{2^n}$$

这样，对每个自然数 n，令 $r_n=\frac{k_n}{2^n}$ 和 $r'_n=\frac{k_n+1}{2^n}=r_n+\frac{1}{2^n}$，就得到单调递增的有理数序列$(r_n)$和单调递减的有理数序列$(r'_n)$，且不等式(1)可写成

$$X(r_n)<X_0\leqslant X(r'_n)=X\left(r_n+\frac{1}{2^n}\right)\qquad(n=1,2,\cdots)\qquad(2)$$

其中序列$(X(r_n))$和$(X(r'_n))$分别是与有理数序列(r_n)和(r'_n)对应的单调递增和单调递减的有理实数序列．下面我们来证明：序列$(X(r_n))$和$(X(r'_n))$都是以 X_0 为极限的收敛序列．

事实上，由不等式(2)，单调序列$(X(r_n))$和$(X(r'_n))$都是有界的．于是根据定理 4，有实数 $\bar{X}_0$ 和 $\bar{X}'_0$，使得 $\bar{X}_0=\lim\limits_{n\to\infty}X(r_n)$和 $\bar{X}'_0=\lim\limits_{n\to\infty}X(r'_n)$．并且，由定理 4 的推论，对每个自然数 n，有

$$X(r_n)\leqslant\bar{X}_0\leqslant X_0\leqslant\bar{X}'_0\leqslant X(r'_n)=X\left(r_n+\frac{1}{2^n}\right)$$

倘若 $\bar{X}_0\neq X_0$ 或者 $X_0\neq\bar{X}'_0$，就应有 $\bar{X}_0<\bar{X}'_0$．于是由性质(D)，存在有理数 r 和 r'，使得 $r<r'$，且

$$\bar{X}_0<X(r)<X(r')<\bar{X}'_0$$

取N充分大，使得 $r<r+\frac{1}{2^N}<r'$．于是由 $X(r_N)\leqslant\bar{X}_0<X(r)$，就有 $r_N<r$，从而有 $r'_N=r_N+\frac{1}{2^N}<r+\frac{1}{2^N}<r'$，即有 $X(r'_N)<X(r')$．但这与 $X(r')<\bar{X}'_0\leqslant X(r'_N)$矛盾．因此有 $\bar{X}_0=X_0=\bar{X}'_0$．即有

$$\lim_{n\to\infty}X(r_n)=X_0=\lim_{n\to\infty}X(r'_n)$$

[注]关于上述性质(C)的证明，我们指出以下两点：

(1) 可以直接按极限的定义去证明序列$(X(r_n))$和$(X(r'_n))$收敛到 X_0，而不应用定理 4．

(2) 当我们取定了$\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}$以后，由性质($A$)，得到的 $r_n=\frac{k_n}{2^n}$ 是由不等式(1)唯一确定的. 如果我们改取 $\varepsilon_n=\frac{1}{p^n}$，其中 p 是大于 1 的任意自然数，并由 § 4 习题的第 3 题，将得到唯一确定的有理数 $r_n=\frac{k_n}{p^n}$，使得不等式

$$X(r_n)\leqslant X_0<X(r'_n)=X\left(r_n+\frac{1}{p^n}\right)$$

对每个自然数 n 都成立. 在附录(II)里，我们将要证明：有理数 $r_n=\frac{k_n}{p^n}$ 等于实数 X_0 的 p 进位无穷小数展开的第 n 位(不足)近似小数. 特别，当 $p=2$ 或 $p=10$ 时，$r_n=\frac{k_n}{p^n}$ 等于实数 X_0 的二进位或十进位小数展开的第 n 位(不足)近似小数.

现在，我们来证明一个实数序列收敛的判定准则，它实际上就是用实数的顺序概念叙述的柯西收敛准则. 为此，先给出以下定义：

定义 4 设(X_n)是给定的实数序列，如果序列(X_n)满足条件：对任意的正有理数 ε，必有有理数 $r=r(\varepsilon)$ 和自然数 $N=N(\varepsilon)$，使得当自然数 $n\geqslant N$ 时，有

$$X(r)<X_n<X(r+\varepsilon)$$

则称实数序列(X_n)满足条件(γ).

定理 5(柯西准则) 实数序列(X_n)收敛的充分必要条件是：序列(X_n)满足条件(γ).

证明 必要性：设 X_0 是收敛序列(X_n)的极限. 根据性质(A')，对任意的正有理数 ε，有有理数 r，使得 $X(r)<X_0<X(r+\varepsilon)$. 根据序列$(X_n)$收敛到 X_0 的定义，由条件(α)，对 $A=X(r)<X_0$，有自然数 N_1，使得当自然数 $n\geqslant N_1$ 时，有 $X(r)<X_n$.

而由条件(β)，对$B=X(r+\varepsilon)>X_0$，又有自然数N_2，使得当自然数$n\geqslant N_2$时，有$X_n<X(r+\varepsilon)$，因此，如取自然数$N=\max(N_1,N_2)$，则当自然数$n\geqslant N$时，就有$X(r)<X_n<X(r+\varepsilon)$．故序列$(X_n)$满足条件$(\gamma)$．必要性得证．

充分性：设实数序列(X_n)满足条件(γ)．为证序列(X_n)收敛到某一实数，考虑实数集合$\mathscr{A}$：

$$\mathscr{A}=\{A\in\mathscr{R}\mid \text{存在自然数 } N,\text{使得当自然数 } n\geqslant N \text{ 时，有 } A<X_n\}$$

由假设，序列(X_n)满足条件(γ)，故对$\varepsilon=1$，有有理数r_1和自然数N_1，使得当自然数$n\geqslant N_1$时，有

$$X(r_1)<X_n<X(r_1+1)$$

由此，有$X(r_1)\in\mathscr{A}$，且对每个$A\in\mathscr{A}$，都有$A<X(r_1+1)$．因此，集合$\mathscr{A}$是非空的有上界的实数集合．根据定理1，存在$X_0=\sup\mathscr{A}$．

现证序列(X_n)收敛到实数X_0，为此需证明X_0满足极限定义的条件(α)和(β)．

对任意的实数$A<X_0$，由X_0是集合$\mathscr{A}$的上确界，故有$A'\in\mathscr{A}$，使得$A<A'$．而由$A'\in\mathscr{A}$，有自然数N，使得当自然数$n\geqslant N$时，有$A'<X_n$；故当自然数$n\geqslant N$时，有$A<X_n$．即条件(α)成立．

对任意的实数$B>X_0$，由性质(D)，有有理数r'和r''，使得$X_0<X(r')<X(r'')<B$．于是由假设条件(γ)，对正有理数$\varepsilon_0=r''-r'$，有有理数r_0和自然数N_0，使得当自然数$n\geqslant N_0$时，有

$$X(r_0)<X_n<X(r_0+\varepsilon_0)$$

这样，由$X(r_0)\in\mathscr{A}$，有$X(r_0)\leqslant X_0$，故有$r_0<r'$．从而有$r_0+\varepsilon_0=r_0+(r''-r')<r''$和$X(r_0+\varepsilon_0)<X(r'')<B$．于是由上面的不等式，当自然数$n\geqslant N_0$时，就有$X_n<B$．故条件$(\beta)$也成立．

因此，序列(X_n)收敛到实数X_0，定理证毕．

在第三章中，我们曾详细地讨论了有理数基本序列和它的性质．按定义，有理数序列(r_n)成为基本序列是(r_n)满足以下柯西

条件:

对任意的正有理数 ε，都存在自然数 $N=N(\varepsilon)$，使得当自然数 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 时，有

$$|r_n-r_m|<\varepsilon$$

由于不等式“$|r_n-r_m|<\varepsilon$”与不等式“$r_m-\varepsilon<r_n<r_m+\varepsilon$”等价，所以当我们对任意的正有理数 ε'，取 $\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{2}$ 和 $r_0=r_N-\varepsilon$，不等式 $r_N-\varepsilon<r_n<r_N+\varepsilon$ 就可以写成不等式 $r_0<r_n<r_0+\varepsilon'$. 因此，有理数基本序列(r_n)满足以下条件(γ):

对任意的正有理数 ε，都存在有理数 r_0 和自然数 N，使得当自然数 $n\geqslant N$ 时，有 $r_0<r_n<r_0+\varepsilon$.

反之，如果有理数序列(r_n)满足以上条件(γ)，则对任意的正有理数 ε，存在有理数 r_0 和自然数 N，使得当自然数 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 时，有 $r_0<r_n<r_0+\varepsilon$ 和 $r_0<r_m<r_0+\varepsilon$，即有 $r_0<r_n<r_0+\varepsilon$ 和 $-r_0-\varepsilon<-r_m<-r_0$，从而当自然数 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 时，有 $-\varepsilon<r_n-r_m<\varepsilon$. 于是序列$(r_n)$满足柯西条件. 因此:

对有理数序列(r_n)来说，柯西条件与条件(γ)是等价的.

这样，我们便得到定理 5 的以下推论:

推论 1 设(r_n)是有理数序列，则相应的有理实数序列$(X(r_n))$收敛的充分必要条件是：序列(r_n)是有理数基本序列.

容易证明，设(r_n)和(s_n)是两个有理数序列，而序列(t_n)是按如下方式确定的：$t_{2k-1}=r_k$, $t_{2k}=s_k(k=1,2,\cdots)$，则(r_n)和(s_n)是两个等价的有理数基本序列的充分必要条件是：(t_n)是一个有理数基本序列. 于是由推论 1 可得:

推论 2 有理数序列(r_n)和(s_n)是等价的有理数基本序列的充分必要条件是：有理实数序列$(X(r_n))$和$(X(s_n))$有同一实数极限.

习　题

1. 设(X_n)是一个实数序列，φ是全体自然数组成的集合$\mathscr{N}$与它自身的一一对应. 对每个自然数n，令$Y_n=X_{\varphi(n)}$，如果序列(X_n)收敛到实数X_0，则序列(Y_n)也收敛到X_0. (序列(Y_n)称为序列(X_n)的一个重排.)

2. 证明性质(C)后的注(1).

3. 对给定的实数序列(X_n)来说，考虑分别由下列各式表示的实数集合$\underline{\mathscr{A}}$、$\overline{\mathscr{A}}$和$\overline{\mathscr{B}}$、$\underline{\mathscr{B}}$:

$$\underline{\mathscr{A}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X\in\mathscr{R}\mid X<X_{k+n}\}$$

$$\overline{\mathscr{A}}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X\in\mathscr{R}\mid X\leqslant X_{k+n}\}$$

$$\overline{\mathscr{B}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X\in\mathscr{R}\mid X_{k+n}<X\}$$

$$\underline{\mathscr{B}}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X\in\mathscr{R}\mid X_{k+n}\leqslant X\}$$

证明：(1) $\underline{\mathscr{A}}\subseteq\overline{\mathscr{A}}$ 和 $\underline{\mathscr{B}}\subseteq\overline{\mathscr{B}}$

(2) $\underline{\mathscr{A}}\cap\underline{\mathscr{B}}=\varnothing$ 且 $\underline{\mathscr{A}}\cup\underline{\mathscr{B}}=\mathscr{R}$

$\overline{\mathscr{A}}\cap\overline{\mathscr{B}}=\varnothing$ 且 $\overline{\mathscr{A}}\cup\overline{\mathscr{B}}=\mathscr{R}$

(3)当(X_n)是有界实数序列时，有

$$\sup\underline{\mathscr{A}}=\inf\overline{\mathscr{B}}\leqslant\sup\overline{\mathscr{A}}=\inf\underline{\mathscr{B}}$$

这时，称$\sup\underline{\mathscr{A}}$或$\inf\overline{\mathscr{B}}$为序列$(X_n)$的下极限，记作$\varliminf\limits_{n\to\infty}X_n$，即

$$\varliminf_{n\to\infty}X_n=\sup\underline{\mathscr{A}}=\inf\overline{\mathscr{B}}$$

而称$\sup\overline{\mathscr{A}}$或$\inf\underline{\mathscr{B}}$为序列$(X_n)$的上极限，记作$\varlimsup\limits_{n\to\infty}X_n$，即

$$\varlimsup_{n\to\infty}X_n=\sup\overline{\mathscr{A}}=\inf\underline{\mathscr{B}}$$

因此

$$\varliminf_{n\to\infty}X_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}X_n$$

(注：这些上确界和下确界的存在性都是由确界存在定理（定理1″）保证的，所以命题"有界实数序列必有上极限和下极限"是由定理1″保证的．参考下面的第4题．)

(4) 实数序列(X_n)极限存在的充分必要条件是它的上、下极限相等，且这时有

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n$$

(5) 当(X_n)是严格的单调序列时，(即对每个自然数n，有$X_n < X_{n+1}$，或对每个自然数n，有$X_n > X_{n+1}$)，有$\underline{\mathscr{A}} = \overline{\mathscr{A}}$和$\underline{\mathscr{B}} = \overline{\mathscr{B}}$．因此，当$(X_n)$是严格的单调有界序列时，有$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$．而当$(X_n)$是单调有界序列时，虽然可能有$\underline{\mathscr{A}} \neq \overline{\mathscr{A}}$或$\underline{\mathscr{B}} \neq \overline{\mathscr{B}}$，但仍有$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$．

4．对给定的实数序列(X_n)来说，设与实数X有关的条件(命题)α_X、$\widetilde{\alpha}_X$、β_X和$\widetilde{\beta}_X$分别为：

(α_X) 存在自然数$N = N(X)$，使得当自然数$n \geqslant N$时，有$X < X_n$；

$(\widetilde{\alpha}_X)$ 对任意的自然数n，都存在自然数m，使得$m > n$且$X \leqslant X_m$；

(β_X) 存在自然数$N = N(X)$，使得当自然数$n \geqslant N$时，有$X_n < X$；

$(\widetilde{\beta}_X)$ 对任意的自然数n，都存在自然数m，使得$m > n$且$X_m \leqslant X$．

(注：如果把条件$\widetilde{\alpha}_X$叙述中的"$X \leqslant X_m$"改成"$X < X_m$"，而把条件$\widetilde{\beta}_X$中的"$X_m \leqslant X$"改成"$X_m < X$"，那末除了下面2)的后半部一般不真外，其余部分都依然成立．同时，对上面的第3题，也可作类似的说明)．

证明 1) 命题α_A、$\widetilde{\alpha}_A$、$\widetilde{\beta}_B$、β_B之间的关系是：命题α_A蕴含命题$\widetilde{\alpha}_A$；命题β_B蕴含命题$\widetilde{\beta}_B$．命题α_B的否定等价于命题$\widetilde{\beta}_B$；命题β_A的否定等价于命题$\widetilde{\alpha}_A$．

2) 命题α_X、$\widetilde{\alpha}_X$、$\widetilde{\beta}_X$、β_X与上题中集合$\underline{\mathscr{A}}$、$\overline{\mathscr{A}}$、$\underline{\mathscr{B}}$、$\overline{\mathscr{B}}$的关系是：当且仅当条件(α_A)成立时，$A \in \underline{\mathscr{A}}$；当且仅当条件$(\widetilde{\alpha}_A)$成立时，$A \in \overline{\mathscr{A}}$．当且仅当条件$(\beta_B)$成立时，$B \in \overline{\mathscr{B}}$；当且仅当条件$(\widetilde{\beta}_B)$成立时，$B \in \underline{\mathscr{B}}$．

3) 实数X_*是序列(X_n)的下极限的充分必要条件为：对每个$A < X_*$，命题α_A成立，且对每个$B > X_*$，命题α_B不成立(即命题$\widetilde{\beta}_B$成立)．

实数X^*是序列(X_n)的上极限的充分必要条件为：对每个$A < X^*$，命题β_A不成立(即命题$\widetilde{\alpha}_A$成立)，且对每个$B > X^*$，命题β_B成立．

(注：这里所叙述的上、下极限的充分必要条件，不仅与极限定义的叙述

方式类似，而且没有用到确界的概念，因此，在实际上把这两个充分必要条件当作上、下极限的定义更为恰当.）

5. 设(X_n)是一个实数序列，X_0是一个实数，如果存在序列(X_n)的一个子序列(X_{n_k})，使得

$$\lim_{k\to\infty}X_{n_k}=X_0$$

则称X_0是序列(X_n)的极限点. 可以证明以下诸命题：

1) X_0是实数序列(X_n)的极限点的充分必要条件为：对每个$A<X_0$，条件$(\widetilde{\alpha}_A)$成立，且对每个$B>X_0$，条件$(\widetilde{\beta}_B)$成立.（这里条件$(\widetilde{\alpha}_A)$和$(\widetilde{\beta}_B)$如第4题及其注所述.）

2) 若序列(X_n)有上（下）极限，则上（下）极限是序列(X_n)的最大（小）极限点. 并且在这种情形下序列(X_n)是上（下）有界的.

3) 有界实数序列(X_n)至少有一个极限点（布尔查诺-维尔斯特拉斯定理）.

6. 设对每个自然数n，令

$$r_n=\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\cdots+\frac{c_k}{10^k}$$

其中$n=c_kc_{k-1}\cdots c_2c_1$是自然数$n$的十进位表示（显然，自然数$n$的第$i$位数字$c_i$是与$n$有关的）. 则与有理数序列$(r_n)$对应的有理实数序列$(X(r_n))$的全体极限点组成的集合是闭区间$[X(0), X(1)]$. 问：如果把有理数$r_n$改写成

$$r_n=\frac{c_1}{10^2}+\frac{c_2}{10^4}+\cdots+\frac{c_k}{10^{2k}}$$

那末相应的结论应作怎样的修改？

7. 设$\mathscr{X}$是一个实数集合，X_0是一个实数，如果在包含X_0的每个开区间(A, B)中都含有无限多个属于集合$\mathscr{X}$的数，则称X_0是$\mathscr{X}$的极限点. 如果$\mathscr{X}$是一个含有无限多个实数的有界集合，那末可以证明：

1) 集合$\mathscr{X}$至少有一个极限点；

2) 集合$\mathscr{X}$有最大的极限点，也有最小的极限点.

8. 设(r_n)是一个有界的有理数序列，则有理数集合：

$$X=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{r\in Q\,|\,r+\frac{1}{k}<r_{m+n}\}$$

是一个实数（即满足条件 i)、ii)、iii)的有理数集合）；并且当(r_n)是有理数基本序列时，相应的有理实数序列$(X(r_n))$收敛到X，即有$X=\lim\limits_{n\to\infty}X(r_n)$.

§6 两种实数之间的对应 戴德金实数域

在第三章里，我们把有理数基本序列的等价类作为康托尔实数的定义，并且在全体康托尔实数 x 组成的集合 R 中定义了加法、乘法运算和顺序关系，证明了康托尔实数集合 R 在所定义的运算和顺序关系下是一个满足阿基米得公理的完备的有序域；而且 R 中全体有理实数组成的集合 $\bar{Q}$ 既在 R 中稠密又与有理数域 Q 是保序同构的．现在，我们要指出：在康托尔实数集合 R 和戴德金实数集合 $\mathscr{R}$ 之间可以自然地建立一个保序对应，因而可以在 $\mathscr{R}$ 中引入加法和乘法运算使得戴德金实数集合 $\mathscr{R}$ 与康托尔实数集合 R 是同构的有序域．为此，我们先来证明以下命题：

命题 4 在康托尔实数集合 R 和戴德金实数集合 $\mathscr{R}$ 之间存在一个保持顺序的一一对应 φ，使得与同一有理数 r 相应的康托尔有理实数 $\bar{r}$ 和戴德金有理实数 $X(r)$，有 $X(r)=\varphi(\bar{r})$．

证明 对任意的康托尔实数 $x\in R$，由康托尔实数的定义，可以取一个有理数基本序列 (r_n)，使得 $(r_n)\in x$．而由定理 5 的推论 1，与基本序列 (r_n) 对应的戴德金实数 $X\in\mathscr{R}$，满足 $X=\lim\limits_{n\to\infty}X(r_n)$．而根据定理 5 的推论 2，极限 X 与 $(r_n)\in x$ 的选取无关（只与 x 有关）．所以按上述方式确定的戴德金实数 X 是由 x 唯一决定的，记作 $X=\varphi(x)$，于是：

$X=\varphi(x)$ 当且仅当 $X=\lim\limits_{n\to\infty}X(r_n)$，其中 $(r_n)\in x$．

反之，对每个 $X\in\mathscr{R}$，由性质 (C)，存在有理实数序列 $(X(r_n))$，使得 $X=\lim\limits_{n\to\infty}X(r_n)$．于是由定理 5 的推论 1，相应的有理数序列 (r_n) 是基本序列，从而对这个基本序列 (r_n) 所属的等价类 $x\in R$ 来说，就有 $X=\varphi(x)$．因此，映射 φ 是从集合 R 到集合 $\mathscr{R}$ 上的映射．

显然，对任意的有理数 $r\in Q$ 来说，如果 $\bar{r}$ 和 $X(r)$ 分别是与 r

相应的康托尔有理实数和戴德金有理实数，那末由常值序列$(r)\in\bar{r}$和$X(r)=\lim\limits_{n\to\infty}X(r)$，就有$X(r)=\varphi(\bar{r})$.

由于当且仅当有理数$r_1<r_2$时，有$\bar{r}_1<\bar{r}_2$. 所以由性质(F)，$\bar{r}_1<\bar{r}_2$当且仅当$\varphi(\bar{r}_1)<\varphi(\bar{r}_2)$.

对任意的$x\in R$和$y\in R$，如果$x<y$，则由有理实数集$\bar{Q}$在R中的稠密性，有有理实数$\bar{r}\in R$，使得

$$x<\bar{r}<y$$

这样，当x是有理实数时，当然有$\varphi(x)<\varphi(\bar{r})$；而当$x$是无理实数时，取$(r_n)\in x$，由$x<\bar{r}$，对充分大的自然数$n$，应有$r_n<r$，即有$X(r_n)<X(r)$. 而由$X=\lim\limits_{n\to\infty}X(r_n)$和$X=\varphi(x)$，就有$\varphi(x)\leqslant\varphi(\bar{r})$. 注意到$x$是康托尔无理实数，故$X=\varphi(x)$必须也是一个戴德金无理实数，于是由$\varphi(x)\leqslant\varphi(\bar{r})$，就有$\varphi(x)<\varphi(\bar{r})$. 同样地，由$\bar{r}<y$，有$\varphi(\bar{r})<\varphi(y)$. 因此，当$x<y$时，有$\varphi(x)<\varphi(y)$. 这样，便证明了$\varphi$是$R$与$\mathscr{R}$之间的保序对应(命题 4 证毕).

根据康托尔实数集合R是一个有序域，由上面的命题 4，我们可以利用保序映射φ的对应关系，在戴德金实数集合$\mathscr{R}$中对应地引进加法和乘法运算，使得$\mathscr{R}$是一个与R同构的有序域，并且保序映射φ就是R与$\mathscr{R}$之间的同构映射.

也就是说，对任意的$X\in\mathscr{R}$、$Y\in\mathscr{R}$，如果φ^{-1}是命题 4 中保序映射φ的逆映射，且$x=\varphi^{-1}(X)$、$y=\varphi^{-1}(Y)$，则戴德金实数的加法运算$X+Y$和乘法运算$X\cdot Y$分别定义为康托尔实数的加法运算$x+y$的像$\varphi(x+y)$和乘法运算$x\cdot y$的像$\varphi(x\cdot y)$. 即按定义，当且仅当$X=\varphi(x)$和$Y=\varphi(y)$时，有

$$X+Y=\varphi(x+y)\text{和}X\cdot Y=\varphi(x\cdot y)$$

在这样定义的加法运算和乘法运算下，容易验证，戴德金实数集合$\mathscr{R}$是一个与康托尔实数域R同构的有序域，并且映射φ显然就是同构映射. 其中，数$X(0)$是$\mathscr{R}$中的零元素，记作$0=X(0)$，数

$X(1)$是$\mathscr{R}$中的单位元素，记作$1=X(1)$；对任意的$X\in\mathscr{R}$，如果$x=\varphi^{-1}(X)$，那末，数$\varphi(-x)$就是数X的相反数，记作$-X=\varphi(-x)$，而当$X\neq0$时，有$x=\varphi^{-1}(X)\neq0$，数$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$就是数$X$的倒数，记作$\frac{1}{X}=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. 证明的细节，请读者自己完成. 这里，我们只把所得的结果，表述成以下命题：

命题 5 康托尔实数集合R与戴德金实数集合$\mathscr{R}$是互相同构的、满足阿基米得公理的、完备的有序域.

如果把互相同构的代数系看作是同一个代数系的话，那末康托尔实数就与戴德金实数没有任何区别. 同样地，有理数也就与两种有理实数没有任何区别，并可把有理数域看成是康托尔实数域或戴德金实数域中的子域.

习 题

在戴德金实数集合$\mathscr{R}$中，按以下方式直接定义两个戴德金实数X和Y的加法运算$X+Y$和乘法运算$X\cdot Y$：

当$X=X(r)$，$Y=X(s)$是两个有理实数时，规定

$$X+Y=X(r+s) \quad 和 \quad X\cdot Y=X(r\cdot s)$$

当X和Y是两个任意的戴德金实数时，由性质(C)，有有理实数序列(X_n)和有理实数序列(Y_n)，使得

$$X=\lim_{n\to\infty}X_n,\quad Y=\lim_{n\to\infty}Y_n$$

则规定

$$X+Y=\lim_{n\to\infty}(X_n+Y_n)$$
$$X\cdot Y=\lim_{n\to\infty}(X_n\cdot Y_n)$$

证明：1) 如上定义的$X+Y$和$X\cdot Y$是唯一确定的.

2) 在上述的运算定义下，$\mathscr{R}$是一个满足阿基米得公理的有序域.

3) 如上定义的加法运算和乘法运算与本节正文中定义的运算是相同的.

(提示：在证明 1)和 2)时，可以利用有理数基本序列的概念及其性质，但要避免引用康托尔实数的概念.)

附录Ⅰ 实数的公理系统

在第三章和第四章中，我们从有理数域出发，用两种不同的方式，建立了两种构造不同(即定义不同)的实数域，即康托尔实数域 R 和戴德金实数域 $\mathscr{R}$. 它们都是满足阿基米得公理的完备的有序域，并且这两个构造不同的实数域是同构的. 因此，对于这两种构造不同的实数来讲，可以给出完全相同的概念或定义，也可以证明完全相同的命题和定理；只要这个概念或定义仅仅是从顺序关系、加法和乘法运算及其基本性质(与实数的构造无关)出发逐步地建立起来的，只要这个命题或定理仅仅是根据这些基本性质证明的. 所以在谈到实数时，我们可以不必关心实数本身采用什么形式表现，而主要地去弄清楚实数与实数之间有哪些基本关系，这些关系又满足哪些基本性质. 正是这些基本关系和基本性质完全刻划了实数的本质. 用这样的观点和方法去理解并建立实数的概念，叫做实数的公理化方法. 能够完整地刻划实数本质的、既不可缺少又没有多余的那些基本性质的全体就组成了实数的公理系统，其中每一条基本性质都是一条公理. 下面，我们来给出实数的一个公理系统.

设 R 是一个集合，如果在集合 R 的元素之间规定了一种满足以下公理(Ⅰ.1—2)的顺序关系“$>$”，并规定了分别称为加法“$+$”和乘法“$\cdot$”的运算关系，使得对任意的 $x\in R$ 和 $y\in R$，都有 $x+y\in R$ 和 $x\cdot y\in R$，且满足以下的公理(Ⅱ.1—5)和(Ⅲ.1—6)；而且 R 还满足下面的阿基米得公理(Ⅳ)和完备公理(Ⅴ)，则称集合 R 是一个实数域，R 中的元素称为实数. 所有以下五组公理(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)、(Ⅳ)和(Ⅴ)的全体就称为实数的一个公理系统.

(I.1) 对任意的 $x\in R$ 和 $y\in R$,以下三种关系

$$x>y,\quad x=y,\quad y>x$$

有且仅有一种关系成立;

(I.2) 若 $x>y$ 且 $y>z$, 则 $x>z$;

(II.1) $x+y=y+x$;

(II.2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

(II.3) 存在元素 $0\in R$,对每个 $x\in R$,都有 $x+0=x$;

(II.4) 对每个 $x\in R$ 都存在元素 $-x\in R$, 使得 $x+(-x)=0$;

(II.5) 若 $x>y$,则对任意的 z,都有 $x+z>y+z$.

(III.1) $x\cdot y=y\cdot x$;

(III.2) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$;

(III.3) 存在元素 $1\in R$ 且 $1\neq 0$, 对每个 $x\in R$,都有 $x\cdot 1=x$;

(III.4) 对每个 $x\in R,x\neq 0$, 都存在元素$\frac{1}{x}\in R$,使得

$$x\cdot\frac{1}{x}=1$$

(III.5) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$;

(III.6) 若 $x>0,y>0$,则 $x\cdot y>0$.

(IV) (阿基米得公理)对任意的 $x\in R,y\in R$,如果 $x>0$, $y>0$,则存在自然数 n,使得 $nx\geqslant y$.

(V) (完备公理) 设对每个自然数 n,$[a_n, b_n]$是 R 中的一个闭区间[*],且$[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}]$,则至少存在一个元素 $c\in R$,使得对一切自然数 n,都有 $c\in[a_n,b_n]$.

注 1 若在集合 R 中仅规定了满足公理 (I.1—2)的顺序关系“$>$”,则称集合 R 是一个有序集,公理(I.1—2)称为顺序公理. “$x>y$”读作“x 大于 y”;它又可写成“$y<x$”,读作“y 小于 x”. 如果关系

(*) 这里,闭区间$[a,b]$的定义和前面的相同,即$[a,b]=\{x\in R\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

"≥"表示">或="读作"大于或等于"，(关系"≤"表示"<或="，读作"小于或等于")，那末关系">"表示"≥且≠"（关系"<"表示"≤且≠"），且顺序公理(I.1—2)可以由以下三条公理来代替：

(I.1′) 若 $x\geq y, y\geq z$，则 $x\geq z$；

(I.2′) 若 $x\geq y, y\geq x$，则 $x=y$；

(I.3′) 对任意的 $x\in R$ 和 $y\in R$，或者 $x\geq y$，或者 $y\geq x$.

(公理(I.1—2)与公理(I.1′—3′)是等价的，其证明见第四章§2).

注 2 规定了满足公理(II.1—4)和(III.1—5)的运算关系"+"和"·"的集合 R 称为域(若其中公理(III.4)不成立，则 R 称为环). 在域 R 中，零元素 0 和单位元素 1 分别是加法运算和乘法运算的"模"；元素 $-x$ 和 $\frac{1}{x}$ 分别称为元素 x 的加法和乘法运算的逆元素. 在域 R 中，方程 $a+x=b$ 和方程 $a\cdot x=b$ (其中 $a\neq 0$) 恒有唯一解，分别为 $x=b+(-a)$ 和 $x=b\cdot\frac{1}{a}$. $b+(-a)$ 可记作 $b-a$，称为 b 与 a 的差；$b\cdot\frac{1}{a}$ 可记作 $\frac{b}{a}$，称为 b 与 a 的商. 因此，在域 R 中，四则运算是封闭的.

注 3 若在集合 R 中规定了满足三组公理(I.1—2)、(II.1—5)、(III.1—6)的顺序关系">"和运算"+"、"·"，则称 R 是一个有序域. 在有序域中，单位元素 1 经过有限次四则运算，可以得到任意的有理数. 因此，任意的有序域都以有理数域作为它的一个子域. 在有序域 R 中，可以像有理数域或实数域那样，以同样的语言给出以下一些概念的定义：上(下)有界集合、集合的上(下)确界、集合的稠密性、区间、绝对值、单调序列、序列的极限、序列和集合的极限点等等；但需要注意：有序域 R 中的元素未必是数.

注 4 满足阿基米得公理(IV)的有序域称为阿基米得域或简称阿氏域. 容易证明：有理数集在阿氏域中是稠密的. 因此，实

数域就是满足完备公理(Ⅴ)的阿氏域.

可以证明这样的定理：如果把同构的域看作是相等的话，那末任意两个实数域都是相等的.

这个定理说明，在同构的意义下，由公理系统(Ⅰ)—(Ⅴ)确定的实数域是唯一的. 我们不去证明这个定理了，但由于我们在前面详细地讨论了实数的康托尔构造和戴德金构造，所以这个定理应该是容易理解的，并且读者不难自行证明这个定理.

习　　题

1. 设 A 是一个有序域，Q 是由单位元素经过加、减、乘、除四则运算所得的元素(称为有理元素)的全体. 证明：当 A 是阿基米得域时，集合 Q 在 A 中是稠密的.

2. 设 A 是一个有序域，证明：A 是一个阿氏域，当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

3. 设 R 是一个有序域，则以下十个命题是等价的. (即如果以下诸命题中的任一命题成立，则其余九个命题都成立)

㊀ 阿基米得公理(Ⅳ)和完备公理(Ⅴ)；

㊁ 有上界的非空集合必有上确界；

㊂ 单调递增的有界序列必有极限；

㊃ 分划的连续性定理(定理的叙述见第四章§3定理2或§3习题第2题)；

㊄ 单调递减的有界序列必有极限；

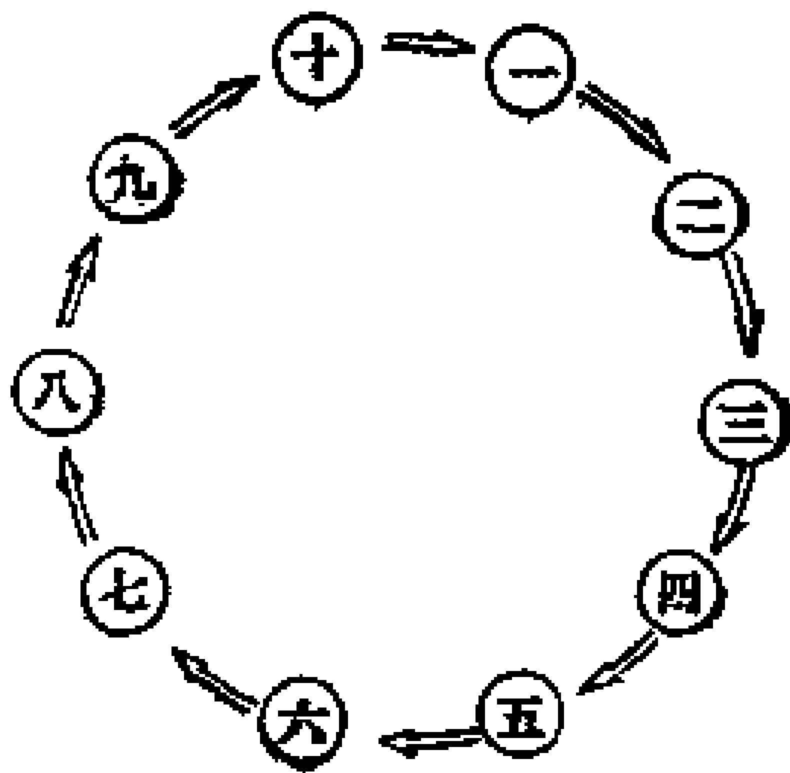
㊅ 有下界的非空集合必有下确界；

㊆ 有限复盖定理(定理的叙述见第四章§3习题第4题)；

㊇ 有界的无限集合至少有一个极限点(见第四章§5习题第7题)；

㊈ 有界序列必有收敛的子序列；

㊉ 阿基米得公理(Ⅳ)和柯西收敛准则(见第三章§6定理7).



（提示：根据R是一个有序域，可以从以下图上的任一命题出发，按箭头所指的方向，依次地证明下一个命题.）

问题：读者能否自行设计一个圈图，使得证明更加简练？

4. 凡满足阿基米得公理的有序域都与实数域的某一子域同构.

附录 II　实数的 p 进位无穷小数表示

我们先讨论实数的二进位小数表示，然后再推广到一般的 p 进位小数表示.

设 k_0 是一个给定的整数，对每个自然数 i，c_i 是给定的整数 0 或 1，如果记

$$(0, c_1c_2\cdots c_n)_2=\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2^2}+\cdots+\frac{c_n}{2^n}$$

则称数 $k_0+(0, c_1c_2\cdots c_n)_2$ 是一个以 c_i 为第 $i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 位小数的二进位有限小数，k_0 是这个有限小数的整数部分.

由于 c_i 等于 0 或 1，所以对任意的自然数 n 和 m，当 $n>m$ 时，有

$$\begin{aligned}0&\leqslant[k_0+(0, c_1c_2\cdots c_n)_2]-[k_0+(0, c_1c_2\cdots c_m)_2]\\&=\frac{c_{m+1}}{2^{m+1}}+\frac{c_{m+2}}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{c_n}{2^n}<\frac{1}{2^m}\end{aligned}$$

于是根据柯西准则（第三章 § 6 定理 7），极限

$$\lim_{n\to\infty}[k_0+(0, c_1c_2\cdots c_n)_2]$$

存在，以 $k_0+(0, c_1c_2\cdots c_n\cdots)_2$ 表示这个极限，并称 $k_0+(0, c_1c_2\cdots c_n\cdots)_2$ 是以 c_n 为第 n 位小数的二进位无穷小数，k_0 称为这个小数的整数部分. 因此，每一个二进位的无穷小数都表示着一个实数.

反之，我们可以证明：任意一个实数 x_0 都可以写成二进位无穷小数（或者说展开成二进位无穷小数）.

事实上，在第四章 § 5 证明性质 (C) 时，对每个 $n\,(n=0,1,2,\cdots)$，取 $\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}$ 后，由性质 (A) 得到，满足不等式

$$\frac{k_n}{2^n} \leqslant x_0 < \frac{k_n+1}{2^n} \qquad (n=0,1,2\cdots)$$

的有理数序列 $\left(\frac{k_n}{2^n}\right)$ 是单调递增的，而序列 $\left(\frac{k_n+1}{2^n}\right)$ 是单调递减的，并且其中整数 $k_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是唯一确定的。

对任意的$n(n=0,1,2,\cdots)$，将 $\frac{k_n}{2^n}$ 写成

$$\frac{k_n}{2^n} = k_0 + \left(\frac{k_1}{2} - k_0\right) + \left(\frac{k_2}{2^2} - \frac{k_1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{k_n}{2^n} - \frac{k_{n-1}}{2^{n-1}}\right)$$

$$= k_0 + \frac{k_1 - 2k_0}{2} + \frac{k_2 - 2k_1}{2^2} + \cdots + \frac{k_n - 2k_{n-1}}{2^n}$$

并对每个自然数 i，记 $c_i = k_i - 2k_{i-1}$，则 c_i 是整数。且由

$$\frac{k_{i-1}}{2^{i-1}} \leqslant \frac{k_i}{2^i}$$

有 $2k_{i-1} \leqslant k_i$，即有 $k_i - 2k_{i-1} \geqslant 0$；而由

$$\frac{k_i+1}{2^i} \leqslant \frac{k_{i-1}+1}{2^{i-1}} = \frac{2k_{i-1}+2}{2^i}$$

有 $k_i + 1 \leqslant 2k_{i-1} + 2$，即有 $k_i - 2k_{i-1} \leqslant 1$。所以整数 $c_i = k_i - 2k_{i-1}$ 满足不等式 $0 \leqslant c_i \leqslant 1$，即对每个自然数 i，c_i 等于 0 或 1。这样，对每个 n，$\frac{k_n}{2^n}$等于一个二进位有限小数：

$$\frac{k_n}{2^n} = k_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n} = k_0 + (0, c_1 c_2 \cdots c_n)_2$$

且由不等式 $\frac{k_n}{2^n} \leqslant x_0 < \frac{k_n+1}{2^n}$，有

$$0 \leqslant x_0 - [k_0 + (0, c_1 c_2 \cdots c_n)_2] < \frac{1}{2^n}$$

因此，有

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} [k_0 + (0, c_1 c_2 \cdots c_n)_2]$$

即有

$$x_0=k_0+(0,c_1c_2\cdots c_n\cdots)_2$$

因此，任意的实数 x_0 都可以按以上方式展开成一个二进位的无穷小数.

我们还需要指出以下几点:

1）对每个自然数 n, k_n 是满足不等式

$$\frac{k_n}{2^n}\leqslant x_0<\frac{k_n+1}{2^n}$$

的唯一整数，且 $c_n=k_n-2k_{n-1}$. 所以，x_0 的第 n 位二进小数 c_n 是由该不等式唯一确定的.

2）$c_n=k_n-2k_{n-1}=1$ 当且仅当 $\frac{k_n+1}{2^n}=\frac{k_{n-1}+1}{2^{n-1}}$, 所以由

$$x_0<\frac{k_n+1}{2^n} \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}\frac{k_n+1}{2^n}=x_0$$

应有无限多个自然数 n, 使得 $c_n\neq1$. 因此，按上述方式的展开是不以 1 为循环的.

3）$c_n=k_n-2k_{n-1}=0$ 当且仅当 $\frac{k_n}{2^n}=\frac{k_{n-1}}{2^{n-1}}$. 所以由

$$\frac{k_n}{2^n}\leqslant\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}\leqslant x_0 \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{2^n}=x_0$$

推知，x_0 是形如 $\frac{k}{2^{n_0}}$ 的有理数的充分必要条件是 x_0 按上述方式能展成二进位的有限小数(自第 n_0 位起是以 0 为循环的). 另外，当 $x_0=\frac{k}{2^{n_0}}$ (k 为整数)时，x_0 显然还可以展成一个以 1 为循环的二进位无穷小数.

4）任意实数的不以 1 为循环的二进位无穷小数表示是唯一的. 事实上，对于任意两个不以 1 为循环的二进位无穷小数表示的实数

$$x=k_0+(0,c_1c_2\cdots c_n\cdots)_2$$

和

$$y=l_0+(0,d_1d_2\cdots d_n\cdots)_2$$

来说，容易验证："$x<y$" 当且仅当"存在 n_0，使得 $k_0=l_0$，$c_n=d_n$ $(n<n_0)$ 而 $c_{n_0}<d_{n_0}$"．因此，任一实数只能有一种不以 1 为循环的二进位无穷小数表示．

5）可以证明：数 x_0 是有理数的充分必要条件是它的二进位无穷小数展开是循环的，并且其循环节小于把 x_0 写成既约分数时的分母．（证明留给读者，见习题）．

以上讨论的实数的二进位小数表示，可以平行地推广成一般 p 进位小数表示，p 是大于 1 的固定的自然数．

设 p 是个大于 1 的固定的自然数，k_0 是个整数，c_i 是满足 $0\leqslant c_i<p$ 的整数，$n=1,2,\cdots$，记

$$k_0+(0,c_1c_2\cdots c_n)_p=k_0+\frac{c_1}{p}+\frac{c_2}{p^2}+\cdots+\frac{c_n}{p^n}$$

则称 $k_0+(0,c_1c_2\cdots c_n)_p$ 为有 n 位小数的 p 进位有限小数，c_i 叫做第 i 位小数．同样可证：极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[k_0+(0,c_1c_2\cdots c_n)_p\right]$$

存在，而把由这个极限确定的实数 x_0 以 $k_0+(0,c_1c_2\cdots c_n\cdots)_p$ 表示之，并称 $k_0+(0,c_1c_2\cdots c_n\cdots)_p$ 为实数 x_0 的 p 进位无穷小数表示，c_n 叫做这个实数的第 n 位小数．

反之，设 x_0 是任意给定的实数，则对每个非负整数，有唯一的整数 k_n，满足

$$\frac{k_n}{p^n}\leqslant x_0<\frac{k_n+1}{p^n}$$

且序列 $\left(\dfrac{k_n}{p^n}\right)$ 单调递增趋于极限 x_0，而序列 $\left(\dfrac{k_n+1}{p^n}\right)$ 单调递减趋于极限 x_0．对每个自然数 n，记 $c_n=k_n-pk_{n-1}$，则 c_n 是满足不等式 $0\leqslant c_n<p$ 的整数，且有

$$\frac{k_n}{p^n}=k_0+\frac{c_1}{p}+\frac{c_2}{p^2}+\cdots+\frac{c_n}{p^n}=k_0+(0,c_1c_2\cdots c_n)_p$$

和

$$0\leqslant x_0-[k_0+(0,c_1c_2\cdots c_n)_p]<\frac{1}{p^n}$$

从而有 $x_0=k_0+(0,c_1c_2\cdots c_n\cdots)_p$. 因此,我们得到如下结论:

每个 p 进位无穷小数都表示一个实数;反之,每个实数都可以展开成 p 进位无穷小数.

还可以和二进位表示类似地证明:

1) 根据不等式

$$\frac{k_n}{p^n}\leqslant x_0<\frac{k_n+1}{p^n}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

确定的小数中,$c_n=k_n-pk_{n-1}$有无限多个 c_n 不等于 $p-1$. 而且,x_0 是 p 进位有限小数的充分必要条件是 x_0 形如$\frac{k}{p^n}$(k 为一整数).

2) 任意实数的不以$p-1$为循环的 p 进位小数表示是唯一的.

3) 实数 x_0 是有理数的充分必要条件是它的 p 进位小数表示是循环的, 并且其循环节小于把有理数写成既约分数时的分母.

作为实数的无穷小数表示的一个应用, 我们来证明实数集合 R 是不可数的. 它说明无理数和有理数虽然都在实数中是稠密的,然而无理数比起有理数来要多得多. 为了证明 R 是不可数的,只需证明半开半闭区间[0, 1)是不可数的即可:

用反证法,倘若区间[0, 1)是可数的,那末可将区间[0, 1)中的所有的数排成序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

即,对每个 $x_0\in[0,1)$,应有某个自然数 n_0,使得 $x_0=x_{n_0}$, 且对每个自然数 n,有 $x_n\in[0,1)$.

把序列(x_n)的每一项x_n,都表示成一个三进位的不以 2 为循环

的无穷小数，就有

$$x_n=(0,c_1^{(n)}c_2^{(n)}\cdots c_k^{(n)}\cdots)_3\qquad(n=1,2,\cdots)$$

现按以下方式确定一个三进位的无穷小数$(0,c_1c_2\cdots c_n\cdots)_3$:

$$c_n=\begin{cases}1 & (\text{当 } c_n^{(n)}=0 \text{ 时})\\ 0 & (\text{当 } c_n^{(n)}\neq 0 \text{ 时})\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots)$$

显然，无穷小数$(0,c_1c_2\cdots c_n\cdots)_3$不以2为循环，且由$(0,c_1c_2\cdots c_n\cdots)_3$表示的实数$x_0\in[0,1)$。于是应有自然数$n_0$，使得$x_0=x_{n_0}$，对每个自然数$k$，应有$c_k=c_k^{(n_0)}$。但由$c_n$的定义，却有$c_{n_0}\neq c_{n_0}^{(n_0)}$，乃得矛盾。因此，区间$[0,1)$是不可数的。

习　　题

1. 如果以$E(x)$表示实数x的整数部分，即$E(x)$是满足不等式

$$E(x)\leqslant x<E(x)+1$$

(或$x-1<E(x)\leqslant x$)的整数，则对每个自然数n，实数x的不以$p-1$为循环的p进位小数表示的第n位小数c_n可由等式

$$c_n=E(p^nx)-pE(p^{n-1}x)$$

确定(它的整数部分$k_0=E(x)$)。

$\left(\text{提示：注意不等式}\dfrac{k_n}{p^n}\leqslant x_0<\dfrac{k_n+1}{p^n}.\right)$

2. 设x是任意给定的实数，p是大于或等于2的自然数，作数列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$如下：

$$x_1=x-E(x),\quad x_{n+1}=px_n-E(px_n)\quad(n=1,2,\cdots)$$

则实数x的不以$p-1$为循环的p进位小数表示的第n位小数c_n可由等式

$$c_n=E(px_n)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

确定。

(提示：用归纳法证明等式$x_n=p^{n-1}x-E(p^{n-1}x)$，$(n=1,2,\cdots)$，从而得$E(px_n)=E(p^nx)-pE(p^{n-1}x)$。)

3. 利用第2题证明：x是有理数的充分必要条件为x的p进位小数表示是循环的，且循环节小于把有理数x写成既约分数$x=\dfrac{l}{m}$的分母m。

(提示：由第2题提示中的等式，对每个自然数n，有

$$x_n = \frac{p^{n-1}l}{m} - E\left(\frac{p^{n-1}l}{m}\right) = \frac{r_n}{m}$$

其中 r_n 是小于 m 的非负整数，从而整数 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 不可能是互不相同的正整数. 于是或者存在自然数 $n_0 \leqslant m$, 使得 $r_{n_0} = 0$; 或者存在小于 m 的自然数 h 和 s, 使得 $x_h = x_{h+s}$ 和 $h+s \leqslant m$. 因此，由 $x_{n+1} = px_n - E(px_n)$ 可推知，对每个自然数 $n \geqslant h$, 有 $x_n = x_{n+s}$, 于是有 $c_n = c_{n+s}$. 反之，如果从某个自然数 n 起，有 $c_n = c_{n+s}$, 则由 $c_n = E(px_n)$ 可推出 x 是有理数.）

4. 设 C 是由满足以下条件的全体实数 x 组成的集合：如果把数 x 表示成不以 2 为循环的三进位无穷小数 $x = k_0 + (0, c_1c_2\cdots c_n\cdots)_3$, 则对每个自然数 n 都有 $c_n \neq 1$(即对每个自然数 n, 有 $c_n = 0$ 或 $c_n = 2$). 证明：

(1) 在任意开区间 (a, b) 中，必有不属于集合 C 的实数.

(2) 对任意的开区间 (a, b), 必有开区间 (a', b'), 使得 $(a', b') \subseteq (a, b)$ 且 $C \cap (a', b') = \varnothing$.

(3) 集合 C 是不可数的.

（提示：(1)不属于集合 C 的实数 x_0 的（不以 2 为循环的）三进位无穷小数展开 $x_0 = k_0 + (0, c_1c_2\cdots c_n\cdots)_3$ 中，有某一位小数 $c_{n_0} = 1$.

(2) 如果 $a' = k_0 + (0, c_1c_2\cdots c_k1)_3$, $b' = k_0 + (0, c_1c_2\cdots c_k2)_3$, 则区间 $I = (a', b')$ 与集合 C 不相交.）

附录III　连分数理论初步

连分数理论是数论中内容丰富、饶有兴趣且有重要应用的一个分支，同时也是实数理论的不可缺少而又有其本身特点的一个部分. 其中，实数的渐近连分数的最佳逼近定理，更以简明的形式深刻地揭示了无理数和有理数之间的一个基本关系，值得成为普及数学的内容之一. 因此，我们把连分数的最基础知识作为本书的一个附录，以备读者参考之用.

为了节省篇幅，我们将采用直叙的方式来介绍连分数的最基本的内容. 除了几个最重要的结果写成定理的形式外，其它的一些基本记号、性质或命题，我们都没有专门地叙述出来，只是在文中随时编以号码，如(1)、(2)、…等等. 望读者注意这些编有号码的公式成立的前提和条件，它们实际上是一些基本概念或有用的辅助命题。

§1　实数的连分数展开

设 x 是给定的实数，$E(x)$是 x 的整数部分，即 $E(x)$是满足不等式

$$0\leqslant x-E(x)<1$$

的唯一整数.

如果 x 不是整数，则 $x-E(x)>0$，记 $x_1=\frac{1}{x-E(x)}$，就有 $x=E(x)+\frac{1}{x_1}$和 $x_1>1$；同样地，如果 x_1 不是正整数，则 $x_1-E(x_1)>0$，记 $x_2=\frac{1}{x_1-E(x_1)}$，就有 $x_1=E(x_1)+\frac{1}{x_2}$和 $x_2>1$；一般地，如果

对某个自然数 N，x_N 是个自然数，这种步骤就终止于 x_N。否则，这种步骤可以一直继续下去，即对每个自然数 n，记 $x_{n+1}=\frac{1}{x_n-E(x_n)}$，就有 $x_n=E(x_n)+\frac{1}{x_{n+1}}$ 和 $x_{n+1}>1$.

这样，对于给定的实数 x，我们得到有限或无限的序列：

$$x=E(x)+\frac{1}{x_1},\quad x_1=E(x_1)+\frac{1}{x_2},\cdots,$$

$$x_{n-1}=E(x_{n-1})+\frac{1}{x_n},\cdots \tag{1}$$

并且因此有

$$x=E(x)+\cfrac{1}{E(x_1)+\cfrac{1}{E(x_2)+\cfrac{1}{E(x_3)+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{E(x_{n-1})+\cfrac{1}{x_n}}}}}} \tag{2}$$

其中 $E(x_1)$、$E(x_2)$、…、$E(x_{n-1})$ 都是自然数，$x_n>1$.

如果对某个自然数 N，x_N 是个自然数，那末，根据(2)式，x 显然是个有理数．反之，如果 $x=\frac{p}{q}$ 是个有理数(其中 q 是自然数，p 是整数)，那末分数 $\frac{p}{q}-E\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{r}{q}$ 的分子 r 总是小于 q 的非负整数．从而当 $r\neq0$ 时（即当 x 不是整数时），$x_1=\frac{q}{r}$ 的分母小于 $x=\frac{p}{q}$ 的分母，因此，有理数 $x, x_1, x_2, \cdots$ 的分母逐渐下降，故必有某个 N，使得 x_N 是个自然数．而当 x 是无理数时，对每个自然数 n，x_n 都是大于 1 的无理数，因此，这时序列 x_1，x_2，x_3，…是无穷的．

现在考虑表示式

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}}} \qquad (3)$$

其中 a_0 是个整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是自然数．表示式(3)称为有限连分数．因此，每个有理数 x 都可以用前面的步骤展成一个有限连分数．也就是说，设 x 是个有理数，如果 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 是用前面的步骤得到的有限数列，其中 x_N 是个自然数，那末，令 $a_0=E(x)$，$a_i=E(x_i)\ (i=1, 2, \cdots, N-1)$，$a_N=x_N=E(x_N)$．于是相应的表示式(3)就等于有理数$x$．注意，在前面的展开中，$a_N=x_N$是大于 1 的自然数，因此，如果把 a_N 改写成$(a_N-1)+\frac{1}{1}$，那末，我们就得到有理数 x 的另一个有限连分数展开，它比原来的展开要多一项．

有理数 $x=\frac{p}{q}$的连分数展开的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N$ 可以用辗转相除法求得．事实上，由 $p=a_0q+r_1$，$q=a_1r_1+r_2, \cdots, r_{N-1}=a_Nr_N$，就有

$$\frac{p}{q}=a_0+\cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}=\cdots$$

$$=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_{N-1}+\cfrac{1}{a_N}}}}}$$

通常把表示式(3)简写成:

$$a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

或

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n] \tag{4}$$

现在,我们更一般地设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 都是正数,并规定

$$P_0=a_0,\ \ Q_0=1,\ \ P_1=a_0a_1+1,\ \ Q_1=a_1;$$

$$P_n=P_{n-1}a_n+P_{n-2},\ \ Q_n=Q_{n-1}a_n+Q_{n-2}\quad (n=2, 3, \cdots) \tag{5}$$

我们来证明等式

$$\frac{P_n}{Q_n}=[a_0, a_1\cdots, a_n]\qquad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{6}$$

事实上,容易验证,当 $n=0$ 和 $n=1$ 时,等式(6)都成立. 假设对于自然数 m 来说,当 $n=m$ 时,等式(6)对于任意的正数 a_1, $a_2, \cdots, a_m$ 都成立. 根据规定(5),有

$$[a_0, a_1, \cdots, a_m]=\frac{P_m}{Q_m}=\frac{P_{m-1}a_m+P_{m-2}}{Q_{m-1}a_m+Q_{m-2}} \tag{7}$$

并且若在这一等式的两边把 a_m 换成 $a_m+\dfrac{1}{a_{m+1}}$ 等式依然成立. 从而有

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{m+1}]=\left[a_0, a_1, \cdots, a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right]$$

$$=\frac{P_{m-1}\left(a_m+\dfrac{1}{a_{m+1}}\right)+P_{m-2}}{Q_{m-1}\left(a_m+\dfrac{1}{a_{m+1}}\right)+Q_{m-2}}$$

$$=\frac{P_m+P_{m-1}\left(\dfrac{1}{a_{m+1}}\right)}{Q_m+Q_{m-1}\left(\dfrac{1}{a_{m+1}}\right)}=\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$$

因此,由归纳法,等式(6)对任意的 $n=0, 1, 2, \cdots$ 和正数 $a_1, a_2, \cdots$,

$a_n, \cdots$都成立，共中 P_n 和 $Q_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是由(5)式所定义的.

现记

$$\Delta_n=P_{n+1}Q_n-P_nQ_{n+1} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{8}$$

于是由(5)式有

$$\begin{aligned}\Delta_n&=P_{n+1}Q_n-P_nQ_{n+1}=(P_na_{n+1}+P_{n-1})Q_n\\&\quad-P_n(Q_na_{n+1}+Q_{n-1})=(-1)\Delta_{n-1}=\cdots\\&=(-1)^n\Delta_0=(-1)^n(P_1Q_0-P_0Q_1)\\&=(-1)^n[(a_0a_1+1)-a_0a_1]=(-1)^n\end{aligned}$$

$$(n=0,1,2,\cdots) \tag{8$'$}$$

从而有

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\Delta_n}{Q_nQ_{n+1}}=\frac{(-1)^n}{Q_nQ_{n+1}} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{9}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+k}}{Q_{n+k}}-\frac{P_n}{Q_n}&=\left(\frac{P_{n+k}}{Q_{n+k}}-\frac{P_{n+k-1}}{Q_{n+k-1}}\right)+\left(\frac{P_{n+k-1}}{Q_{n+k-1}}-\frac{P_{n+k-2}}{Q_{n+k-2}}\right)\\&\qquad+\cdots+\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right)\\&=(-1)^n\left(\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}-\frac{1}{Q_{n+1}Q_{n+2}}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{Q_{n+k-1}Q_{n+k}}\right)\end{aligned}$$

$$(n,k=0,1,2,\cdots) \tag{10}$$

如果假设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$都是正整数，那末，对每个自然数 n，都有 $Q_n<Q_{n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n=+\infty$。故由(10)式，有

$$\left|\frac{P_{n+k}}{Q_{n+k}}-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{Q_nQ_{n+1}} \qquad (n,k=0,1,2,\cdots) \tag{10$'$}$$

于是序列$\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$是基本序列，从而它收敛到某个实数 x.

这样，当 a_0 是整数，$a_n(n=1,2,\cdots)$都是正整数时，有限连分数序列

$$\frac{P_n}{Q_n}=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n] \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

收敛到某个实数 x_0；并且对每个自然数 n，有限连分数序列

$$[a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k}] \qquad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

收敛到某个大于 1 的实数 x_n。即有

$$x_0=\lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, \cdots, a_n] \tag{11}$$

和 $$x_n=\lim_{k\to\infty}[a_n, a_{n-1}, \cdots, a_{n+k}]>1 \qquad (n=1, 2, \cdots) \tag{12}$$

把(11)式写成

$$x_0=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots] \tag{13}$$

并称表示式$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$为实数 x_0 的无限连分数表示。而称$\frac{P_n}{Q_n}=[a_0, a_1, \cdots, a_n]$为 x_0 的 n 阶渐近分数。

同样地，还可以有

$$x_n=[a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k}, \cdots] \qquad (n=1, 2, \cdots) \tag{13$'$}$$

因此，在恒等式

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{n+k}]=[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, [a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k}]]$$
$$(n, k=1, 2, \cdots)$$

中，对每个自然数 n，令 $k\to\infty$ 我们得到：

$$x_0=[a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots]=[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, x_n] \tag{14}$$

并且类似地还可得到

$$x_n=[a_n, x_{n+1}]^{(*)} \qquad (n=1, 2, \cdots) \tag{15}$$

显然，对每个自然数 n，由于 a_n 是正整数，故有 $x_n>1$。

这样，由 $x_0=[a_0, x_1]$，a_0 是整数和 $x_1>1$，有 $a_0=E(x_0)$ 和 $x_1=\frac{1}{x_0-E(x_0)}$；而由 $x_1=[a_1, x_2]$，a_1 是正整数和 $x_2>1$，有$a_1=E(x_1)$

(*) 注意，这里的$[a_0, x_1]$和$[a_n, x_{n+1}]$并不是区间，而是连分数，即$[a_0, x_1]=a_0+\frac{1}{x_1}$和$[a_n, x_{n+1}]=a_n+\frac{1}{x_{n+1}}$。

和 $x_2=\dfrac{1}{x_1-E(x_1)}$；一般地，对任意的自然数$n$，由$x_n=[a_n, x_{n+1}]$，$a_n$是正整数和 $x_{n+1}>1$，有 $a_n=E(x_n)$和 $x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n-E(x_n)}$. 因此，系数 a_n 按照(2)式的原则，由 x_0 唯一确定. 故由(13)式给出的 x_0 (同样，由(13)′式给出的 x_n)必定是无理数.(因为有理数按照(2)式只能展成有限连分数).

反之，如果 x_0 是任意给定的无理数，$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$是由(1)式确定的无限序列，且

$$a_n=E(x_n) \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

则由(2)、(5)、(6)式，并注意到把 $a_0, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$ 换作 $a_0, a_1, \cdots, a_n, x_{n+1}(n=0, 1, 2, \cdots)$，就有

$$\begin{aligned} x_0&=[a_0, a_1, \cdots, a_n, x_{n+1}] \\ &=\frac{P_n x_{n+1}+P_{n-1}}{Q_n x_{n+1}+Q_{n-1}} \quad (n=1, 2, \cdots) \end{aligned} \tag{16}$$

并且

$$\frac{P_n}{Q_n}-x_0=\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_n x_{n+1}+P_{n-1}}{Q_n x_{n+1}+Q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{Q_n(Q_n x_{n+1}+Q_{n-1})} \tag{17}$$

$$(n=1, 2, \cdots)$$

由 $a_{n+1}=E(x_{n+1})$，知 $Q_{n+1}<Q_n x_{n+1}+Q_{n-1}$，于是有

$$\left|\frac{P_n}{Q_n}-x_0\right|<\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \quad (n=1, 2, \cdots) \tag{18}$$

由(6)式和(13)式，即有

$$x_0=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$$

当 $n\geqslant 2$ 时，由(18)式和(17)式，我们还有

$$\begin{aligned} \left|\frac{P_n}{Q_n}-x_0\right|&<\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}<\frac{1}{Q_{n-1}(Q_n+Q_{n-1})} \\ &=\frac{1}{Q_{n-1}[Q_{n-1}(a_n+1)+Q_{n-2}]} \end{aligned}$$

$$<\frac{1}{Q_{n-1}(Q_{n-1}x_n+Q_{n-2})}$$

$$=\left|\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right| \tag{19}$$

并且显然当 $n=1$ 时，(19)式也是成立的．不等式(19)下面我们将要用到．

综合以上讨论，我们得到以下结果：

定理 1 任一实数 x_0 均可按照(1)、(2)的方式展成某个有限或无穷的连分数(6)或(13)；反之，每个连分数都表示一个实数 x_0．并且当 x_0 是有理数时，它有两种有限连分数展开式，其中一种比另一种多一项，且它的最末一个系数等于1；而当 x_0 是无理数时，它的连分数展开是无穷的，而且是唯一的．

根据前面的讨论和公式，我们可以证明关于无理数的各渐近分数的一个重要而且深刻的性质，它可以叙述成如下的定理：

定理 2 （最佳逼近定理） 设 $x_0=[a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots]$ 是一个无理数，$\frac{P_n}{Q_n}=[a_0,a_1,\cdots,a_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 x_0 的 n 阶渐近分数，则对于任意的自然数 n，和任意的有理数 $\frac{p}{q}$，由不等式

$$\left|\frac{p}{q}-x_0\right|<\left|\frac{P_n}{Q_n}-x_0\right|$$

可推出 $Q_n<q$．

证明 设 n 是一个任意的自然数，有理数 $\frac{p}{q}$ 满足不等式

$$\left|\frac{p}{q}-x_0\right|<\left|\frac{P_n}{Q_n}-x_0\right|$$

由(19)式有

$$\left|\frac{p}{q}-x_0\right|<\left|\frac{P_n}{Q_n}-x_0\right|<\left|\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right|$$

于是由$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|>0$，并且由(17)式知$\frac{P_n}{Q_n}-x_0$与$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0$异号。所以由(8)′式有

$$0<\left|\frac{p}{q}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|\leqslant\left|\frac{p}{q}-x_0\right|+\left|x_0-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|<\left|\frac{P_n}{Q_n}-x_0\right|$$

$$+\left|x_0-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|=\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|=\frac{1}{Q_{n-1}Q_n}$$

即有

$$0<\frac{|pQ_{n-1}-P_{n-1}q|}{qQ_{n-1}}<\frac{1}{Q_{n-1}Q_n}$$

或

$$0<Q_n|pQ_{n-1}-P_{n-1}q|<q$$

注意到$pQ_{n-1}-P_{n-1}q$是非零整数，故有$Q_n<q$。证毕。

§2 循环连分数

现在我们先来列举一些由整数平方根表示的无理数的连分数展开的例子：

［例1］ $\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=\cdots$$

即有

$$\sqrt{2}=[1,2,2,\cdots,2,\cdots]$$

［例2］ $\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}}=\cdots$$

即有

$$\sqrt{3}=[1,1,2,1,2,\cdots,1,2,\cdots]$$

此外，还不难展开

$\sqrt{5}=[2,4,4,\cdots,4,\cdots]$

$\sqrt{7}=[2,1,1,1,4,1,1,1,4,\cdots,1,1,1,4,\cdots]$

$\sqrt{13}=[3,1,1,1,1,6,1,1,1,1,6,\cdots,1,1,1,1,6,\cdots]$

$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=[1,1,1,\cdots,1,\cdots]$

以上无理数的连分数展开的系数都是从某个自然数起是周期重复的．一般地，如果连分数具有形状

$$[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_N,b_1,b_2,\cdots,b_k,b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots,b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots]$$

则称这样的连分数是**循环的**．简记作

$$[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_N,\dot{b}_1,b_2,\cdots,\dot{b}_k]$$

于是有：

$$\sqrt{2}=[1,\dot{2}],\quad \sqrt{3}=[1,\dot{1},\dot{2}],\quad \frac{\sqrt{5}+1}{2}=[\dot{1}],$$

$$\sqrt{13}=[3,\dot{1},1,1,1,\dot{6}]$$

等等．

注　根据定理2，一个无理数的各阶渐近分数都是在一定意义上的最佳近似值，所以对非完全平方数的根式作连分数展开可以求得根式的较好的近似值．

下面，我们来证明关于循环连分数的基本定理：

定理3　实数 x_0 可以展成循环连分数的充分和必要条件为 x_0 是某个整系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的无理数根．

证明　必要性：设实数 x_0 可展成循环连分数

$$x_0=[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_N,\dot{b}_1,b_2,\cdots,\dot{b}_k]$$

于是由定理1知 x_0 是个无理数，并且按照(14)式，有

$$x_0=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N, \dot{b}_1, b_2, \cdots, \dot{b}_k]=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N, x_{N+1}]$$

和

$$x_0=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N, b_1, b_2, \cdots, b_k, \dot{b}_1, b_2, \cdots, \dot{b}_k]$$
$$=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N, b_1, b_2, \cdots, b_k, x_{N+k+1}]$$

而由(12)式，有

$$x_{N+1}=[\dot{b}_1, b_2, \cdots, \dot{b}_k]=x_{N+k+1}$$

从而由(16)式，有

$$x_0=\frac{P_N x_{N+1}+P_{N-1}}{Q_N x_{N+1}+Q_{N-1}} \quad 和 \quad x_0=\frac{P_{N+k}x_{N+k+1}+P_{N+k-1}}{Q_{N+k}x_{N+k+1}+Q_{N+k-1}}$$

由以上二式分别解出 x_{N+1} 和 x_{N+k+1}，于是由 $x_{N+1}=x_{N+k+1}$，有

$$\frac{-Q_{N-1}x_0+P_{N-1}}{Q_N x_0-P_N}=\frac{-Q_{N+k-1}x_0+P_{N+k-1}}{Q_{N+k}x_0-P_{N+k}}$$

即有

$$(-Q_{N-1}x_0+P_{N-1})(Q_{N+k}x_0-P_{N+k})$$
$$=(Q_N x_0-P_N)(-Q_{N+k-1}x_0+P_{N+k-1})$$

所以，无理数 x_0 是某个整系数二次方程的根.

充分性：如果实数 x_0 是某一个整系数二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{20}$$

的一个无理数根，那末判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，且 Δ 是一个非完全平方的整数.

把 x_0 展成无穷连分数

$$x_0=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$$

并对每个自然数 n，把(16)式

$$x_0=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, x_n]=\frac{P_{n-1}x_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n+Q_{n-2}}$$

的右端代入方程(20)，经整理得

$$A_n x_n^2+B_n x_n+C_n=0 \qquad (n=1, 2, \cdots) \tag{21}$$

其中

$$A_n=aP_{n-1}^2-bP_{n-1}Q_{n-1}+cQ_{n-1}^2$$
$$B_n=2aP_{n-1}P_{n-2}+b(P_{n-1}Q_{n-2}+Q_{n-1}P_{n-2})+2cQ_{n-1}Q_{n-2}$$
$$C_n=aP_{n-2}^2+bP_{n-2}Q_{n-2}+cQ_{n-2}^2$$
$$(n=1,2,\cdots)$$

经直接计算，得

$$B_n^2-4A_nC_n=b^2-4ac \qquad (n=1,2,\cdots)$$

现在，我们来估计系数 A_n、C_n 和 B_n. 由

$$\begin{aligned}A_n&=aP_{n-1}^2+bP_{n-1}Q_{n-1}+cQ_{n-1}^2\\&=Q_{n-1}^2\left[a\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)^2+b\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)+c\right]\\&=Q_{n-1}^2\left\{a\left[x_0+\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right)\right]^2+b\left[x_0+\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right)\right]+c\right\}\\&=Q_{n-1}^2\left\{(ax_0^2+bx_0+c)+2ax_0\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right)+a\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right)^2\right.\\&\qquad\left.+b\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right)\right\}\\&=Q_{n-1}^2\left\{2ax_0\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right)+a\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right)^2+b\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right)\right\}\end{aligned}$$

于是由不等式(18)和 $Q_{n-1}<Q_n$，有

$$\begin{aligned}|A_n|\leqslant Q_{n-1}^2\Bigg(|2ax_0|\left|\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right|+|a|\left|\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right|^2\\+|b|\left|\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x_0\right|\Bigg)\leqslant|2ax_0|+|a|+|b|\end{aligned}$$
$$(n=1,2,\cdots)$$

从而也有

$$|C_n|=|A_{n-1}|\leqslant|2ax_0|+|a|+|b|$$

并由 $B_n^2-4A_nC_n=b^2-4ac=\Delta$，有

$$B_n^2\leqslant\Delta+4|A_nC_n|\leqslant\Delta+4(|2ax_0|+|a|+|b|)^2 \quad (n=1,2,\cdots)$$

这样一来，系数 $A_n, B_n, C_n(n=1,2,\cdots)$是有界的. 并且由于它们都

是整数，所以至少有三个自然数 n_1, n_2, n_3，使得 $n_1<n_2<n_3$，且

$$A_{n_1}=A_{n_2}=A_{n_3},\quad B_{n_1}=B_{n_2}=B_{n_3},\quad C_{n_1}=C_{n_2}=C_{n_3}$$

从而 x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} 作为三个系数完全相同的二次方程 (21) 的三个根，其中至少有两个是相同的. 将这两个相同的根的脚码记为 $N+1$ 和 $N+k+1$，就有

$$x_{N+1}=x_{N+k+1}$$

于是由 x_n 的意义，对任意的自然数 i，应有

$$x_{N+i}=x_{N+k+i}$$

从而有

$$x_{N+i}=x_{N+k+i}=x_{N+jk+i} \qquad (i=1, 2, \cdots, k; j=1, 2, \cdots)$$

按 a_n 的意义，即有

$$a_{N+i}=a_{N+jk+i} \qquad (i=1, 2, \cdots, k; j=1, 2, \cdots)$$

因此，如果记 $b_i=a_{N+i}(i=1, 2, \cdots, k)$，就有

$$x_0=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N, \dot{b}_1, b_2, \cdots, \dot{b}_k]$$

所以由二次方程(20)的根 x_0 展成的连分数是循环的。

习　题

1. 把$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{n^2-1}$，$\sqrt{n^2+1}$展成连分数（其中 n 是一个自然数）.

2. 把$\sqrt{6}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{n(n+1)}$展成连分数(其中 n 是一个自然数).

3. 把$\sqrt{11}$，$\sqrt{19}$展成连分数.

4. 在开区间 (0, 1) 内具体给出满足以下条件的所有实数 x 的集合 $D_1(n)$：$x\in D_1(n)$ 当且仅当把 x 展成连分数时，它的第一个系数 a_1(分母的整数部分)等于事先给定的自然数 n.

问题：试在开区间(0, 1)内具体给出集合 $D_2(n)$，使得 $x\in D_2(n)$ 当且仅当把 x 展成连分数时，它的第二个系数 a_2 等于事先给定的自然数 n.

(提示：根据连分数展开的定义).

附录IV　代数数和超越数

§1　有理数域的代数扩张

纪元前六百年左右，古希腊的毕达哥拉斯学派证明了正方形的对角线与其边长之间的不可公度性，这是历史上第一次发现无理数.

无理数究竟是些什么样的数呢？

因为第一个无理数，可以从代数方程 $x^2-2=0$ 中得到，这就引导人们去进一步考察一般的代数方程及研究它们的根.

定理1　整系数的代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的任何非整数实根，均为无理数.

证明　假设方程有有理根 $x=\frac{a}{b}$，其中 a、b 互质，$b\geqslant 1$. 我们证明必须 $b=1$. 将 $\frac{a}{b}$ 代入方程，可得

$$a^n=-b(a_1a^{n-1}+a_2a^{n-2}b+\cdots+a_nb^{n-1})$$

由此即知，b 的任何素数因子 p 必可整除 a^n，因此 p 必可整除 a，从而知 p 为 a、b 的公因子，由 a、b 既约的假设，因此必须 $p=1$，这就推知 $b=1$，于是 $x=\frac{a}{b}=a$ 必为整数. 定理证毕.

作为上述定理的特款，考虑方程 $x^n-a=0$，其中 a 为正整数，由定理的结论，知其根 $x=\sqrt[n]{a}$ 当 a 不为整数的 n 次幂时，必为无理数. 由此可知，平常所见用根式表示的数，都是无理数.

我们把有理数域上多项式的根，统称为**代数数**. 因此，一切用根式表示的数，都是代数数. 但是因为代数方程的根，并不都

能用根式来表示(*)，因此代数数还包含许多不能用根式表示的数。

一个代数数，若它所满足的多项式的最低次数为 n，则称为 n 次代数数。显然，一个代数数所满足的最低次多项式，在有理数域上一定是不可约的。任何有理数 $\frac{a}{b}$，都是一次方程 $bx-a=0$ 的根，因此有理数都是一次代数数。一切带有平方根的数，都是二次代数数。显然，二次或二次以上的实代数数一定都是无理数。

我们知道，有理数集是实数轴上的一个稠密集。读者容易自行证明，二次实代数数，在实数轴上也是稠密的。这个事实，可以推广到一般。

定理 2 任何 n 次 $(n\geqslant 1)$ 的实代数数均在实数轴上稠密。

证明 设 α、β 为任二实数，$\alpha<\beta$。要证明存在一个 n 次实代数数 a，满足 $\alpha<a<\beta$。由于在第二章中已经证明了有理数的稠密性，因此下面证明仅对于 $n\geqslant 2$ 的情形进行。

应用二项展开定理，易证下述不等式

$$(x+\beta)^n-(x+\alpha)^n=[(x+\alpha)+(\beta-\alpha)]^n-(x+\alpha)^n$$
$$>n(x+\alpha)^{n-1}(\beta-\alpha)$$

对于一切满足 $x+\alpha>0$ 的 x 成立。注意到不等式右端当 x 趋于无穷时可取任意大的值，因此必有自然数 j，使 $j+\alpha>0$，$j+\beta>0$，并满足

$$(j+\beta)^n-(j+\alpha)^n>5$$

上述不等式表明在实数 $(j+\alpha)^n$ 和 $(j+\beta)^n$ 之间，至少存在四个连续排列的正整数，因此其中必有一个可以表为 $4k+2$（k 正整数）。于是由连续函数的取中间值性质，在 α 和 β 之间必存在一个实数

(*) 根据伽罗华(E. Galois)理论，五次或五次以上代数方程一般不能用根式求解。

a，使 $(j+a)^n=4k+2$. 因为 a 满足整系数代数方程

$$f(x)\equiv(x+j)^n-2(2k+1)=0$$

所以它是一个代数数. 再根据爱森斯坦(Eisenstein)不可约准则(*)，知 $f(x)$ 为一不可约多项式，故 a 为一 n 次代数数. 定理证毕.

上述定理说明，各次代数数的数目，都是"很多"的，而有理数只是代数数中的一个很小的部分而已.

一个数域，假如它所包含的数全是代数数，则称它是有理数域的一个代数扩张. 如我们在第二章中所列举的域 $Q(\sqrt{2})$，它是将代数数 $\sqrt{2}$ 添加到有理数域中去，然后与所有有理数一起实行加减乘除运算而生成的一个域，这个域中的数都具形状 $a+b\sqrt{2}$，其中 a、b 为有理数. 像 $Q(\sqrt{2})$ 这样添加一个(或有限个)代数数到有理数域中而生成的代数扩张域，称为是有理数的单扩张.

一个有理数域的单扩张域，虽然它所包含的数，比起有理数域来是扩大了，但其"完备"性质，却并不比有理数域来得好些. 我们知道，有理数域上的多项式，它的根会跑出有理数域之外，这个性质，我们称之为代数不完备性. 有理数域的这个代数不完备性，对于它的任何单扩张域，仍无改变. 例如在 $Q(\sqrt{2})$ 上的多项式 $x^2-\sqrt{2}$，它的根就不再在 $Q(\sqrt{2})$ 之内. 那末，是否存在代数完备的代数扩张域呢?

我们考虑由所有代数数组成的集合.

定理 3 任两个代数数经过加减乘除运算后仍为代数数.

证明 设 α、β 各为 m、n 次的代数数，并设它们所满足的代数

(*) Eisenstein 不可约准则：$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 为一整系数多项式. 若 $a_0\not\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$，$a_1\equiv a_2\equiv\cdots\equiv a_n\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$，$a_n\not\equiv0(\mathrm{mod}\,p^2)$，其中 p 为一素数，则 $f(x)$ 有理数域上的不可约多项式. 对本例，应作变换 $x+j=t$，将准则应用于多项式 $f(t-j)\equiv t^n-2(2k+1)$.

方程式为:

$$\alpha^m = a_1\alpha^{m-1} + a_2\alpha^{m-2} + \cdots + a_m$$

$$\beta^n = b_1\beta^{n-1} + b_2\beta^{n-2} + \cdots + b_n$$

(a_i、b_j均为有理数). 上述关系式告诉我们, α^m是m个数α^{m-1}, α^{m-2}, …, 1在有理数域上的一个线性组合. 应用数学归纳法即可推知对于任何非负整数k, α^k可以表为上述m个数的一个线性组合. 同理可说明对于任何非负整数l, β^l可以表为n个数β^{n-1}, β^{n-2}, …, 1在有理数域上的一个线性组合. 现在来考虑如下$mn+1$个数:

$$1,\ (\alpha+\beta),\ (\alpha+\beta)^2,\ \cdots,\ (\alpha+\beta)^{mn}$$

若将上述各数均按二项式展开, 再应用以上结论, 即可知上面的$mn+1$个数均可以表为数$\alpha^k\beta^l$的线性组合($k=0, 1, \cdots, m-1$; $\beta=0, 1, \cdots, n-1$). 将$\alpha^k\beta^l$视为有理数域上mn维线性空间的一组基, 即知上述$mn+1$个数(均视为线性空间的向量)必定是线性相关的. 于是, 存在一组不全为0的有理数c_0, c_1, …, c_{mn}, 使

$$c_0 + c_1(\alpha+\beta) + \cdots + c_{mn}(\alpha+\beta)^{mn} = 0$$

这就是$(\alpha+\beta)$所满足的一个代数式, 因此$\alpha+\beta$是一个代数数. 同理可以证明$\alpha\beta$亦为代数数.

若$\alpha\neq0$是m次多项式$f(x)$的根, 则$\dfrac{1}{\alpha}$必为多项式$x^m f\left(\dfrac{1}{x}\right)$的根, 因此若$\alpha$为代数数, $\dfrac{1}{\alpha}$亦必为代数数. 定理证毕.

定理3说明代数数在四则运算下是封闭的, 从而组成一个域. 显然它是有理数域的最大代数扩张.

定理4 设$u_0, u_1, \cdots, u_n$均为代数数, 则方程

$$u_0x^n + u_1x^{n-1} + \cdots + u_n = 0$$

的所有根仍为代数数.

定理的证明, 涉及域的代数扩张的若干性质, 故此从略. 有兴趣的读者可参阅[2].

定理 4 告诉我们，代数数域是一个代数完备的域. 这样，我们从有理数域出发，经过最大的代数扩张，得到了一个具有更好的完备性质的域. 下面自然就产生了这样的问题：代数数域是否已经包罗了所有的无理数呢？一个数域在代数上的完备性是否意味着在距离上的完备性——即连续性呢？这就导致一个新的问题：在数轴上是否还能找到新的"孔隙"——即超越于代数数之外的无理数呢？

§2 超越数的发现

人们把不是代数数的实数，叫做**超越数**. 是否有超越数存在？这个问题引起了十九世纪数学家们的猜测. 从十九世纪中叶到本世纪三十年代，在超越数的问题上有许多次重大的突破，今择要列举如下：

(一) 1851 年法国数学家刘维尔(J. Liouville)根据代数数所必须满足的一个有理逼近性质，从相反的方面找出了一个具体的超越数(刘维尔数)，从而第一个给出了超越数存在的回答.

定义 对于实数 β，若存在有无限多个有理数 $\frac{h}{k}$(其中 h、k 互质，$k>0$)和常数 C，使得

$$\left|\beta-\frac{h}{k}\right|<\frac{C}{k^n}$$

则称 β **具有 n 阶的有理逼近**.

定理 5 一个 n 次的实代数数，不可能有高于 n 阶的有理逼近(*).

证明 令 ξ 为一 n 次实代数数，并设其所满足的不可约方程为

(*) 1955 年 Roth 证明了任何非有理的代数数，只能有二阶的有理逼近. 参阅[10].

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

(a_i 整数). 记 J 为区间 $|x-\xi|\leqslant 1$，$A=\max\limits_{x\in J}|f'(x)|$. 令 $\frac{h}{k}$ 为逼近 ξ 的任一有理数，不妨假设 $\frac{h}{k}\in J$. 因为 $f(x)$ 为一不可约多项式，故当 $n\geqslant 2$ 时，不可能有有理根，因而 $f\left(\frac{h}{k}\right)\neq 0$. 当 $n=1$ 时，ξ 为一有理数，故若选取 k 超过 ξ 的分母，则 $\frac{h}{k}\neq\xi$，亦有 $f\left(\frac{h}{k}\right)\neq 0$. 于是有

$$\left|f\left(\frac{h}{k}\right)\right|=\frac{|a_0h^n+a_1h^{n-1}k+\cdots+a_nk^n|}{k^n}\geqslant\frac{1}{k^n}$$

另一方面，由微分中值定理得

$$f\left(\frac{h}{k}\right)=f\left(\frac{h}{k}\right)-f(\xi)=f'(\eta)\left(\frac{h}{k}-\xi\right)$$

其中 η 为 $\frac{h}{k}$ 与 ξ 间的某个值. 于是可得

$$\left|\frac{h}{k}-\xi\right|=\left|\frac{f\left(\frac{h}{k}\right)}{f'(\eta)}\right|\geqslant\frac{1}{Ak^n}.$$

上述不等式即足以说明 ξ 不可能有高于 n 次的有理逼近，因为不可能存在常数 C，使得对于无限多个 k 满足 $\frac{1}{Ak^n}<\frac{C}{k^{n+1}}$. 定理证毕.

定理 5 给出了实代数数所必须满足的一个必要条件，因此凡不满足这一条件的实数，就一定不是代数数. 刘维尔就是根据这一原理，作出了一个具有任意阶有理逼近的实数，这样的实数，当然只能够是超越数.

定理 6 数 $\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}10^{-k!}$ 是一个超越数.

证明 任取一正整数m，我们证明ξ具有m阶的有理逼近. 令$r_m=\sum_{k=1}^{m}10^{-k!}$，它是一个分母等于$10^{m!}$的有理数. 以它作为$\xi$的逼近数，则得

$$|\xi-r_m|=10^{-(m+1)!}+10^{-(m+2)!}+\cdots<2\cdot10^{-(m+1)!}<(10^{-m!})^m$$

显然，对于一切$n\geqslant m$的r_n，都有

$$|\xi-r_n|<(10^{-n!})^n\leqslant(10^{-n!})^m$$

这就说明了ξ具有m阶的有理逼近. 而m可以选得任意大，于是根据定理5，ξ不可能是代数数，必为超越数，证毕.

以后人们把上述的数ξ，以及类似于ξ的那种具有任意阶有理逼近的数，称之为**刘维尔数**.

(二) 继刘维尔之后，1873年法国数学家厄尔米特(C. Hermite)应用微积分的工具，证明了数e为一超越数. 厄尔米特的方法，在无理数的理论中，有很广的应用.

关于数e，欧拉(L. Euler)于1737年即已用连分数的方法，证明了它是一个无理数. 一般的，我们可以用e的无穷级数形式证明它的无理性(参阅第二章§5的例3)，但e的超越性，则证明较难. 在厄尔米特之前，1840年刘维尔曾证明e不是二次代数数. 今将他们的工作简介如下：

定理7 e不是二次代数数.

证明 假若不然，设e满足整系数的二次方程

$$a_0+a_1e+a_2e^2=0$$

方程两端同乘以$n!e^{-1}$，并将e、e^{-1}用无穷级数表示，则得

$$a_0 n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots\right)$$

$$+n!a_1+n!a_2\left(2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots\right)=0$$

将上式右端分为两部分，记作

$$S_n+R_n=0$$

其中

$$S_n=n!a_0\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)+n!a_1$$

$$+n!a_2\left(2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\text{整数}$$

$$|R_n|=n!\left|\frac{(-1)^{n+1}a_0+a_2}{(n+1)!}+\cdots\right|$$

$$\leqslant n!(|a_0|+|a_2|)\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2(|a_0|+|a_2|)}{n+1}$$

由上式可知当 n 充分大时，可使 $|R_n|<1$. 下面证明 $R_n\neq 0$ 至少对无穷多个 n 成立. 假若不然，则在 $R_n=0$ 的两端同乘以 $n+1$ 可得

$$(-1)^n a_0-a_2=\frac{(-1)^{n+2}a_0+a_2}{n+2}+\frac{(-1)^{n+3}a_0+a_2}{(n+2)(n+3)}+\cdots$$

与上同理可证明上式右端当 n 充分大时，绝对值小于 1，而等式左端当 $|a_0|\neq|a_2|$ 时，对一切 n 都是非零整数，当 $|a_0|=|a_2|$ 时，也可以适当选取 n 使等式左端为非零整数(因为 a_0、a_2 不能同时为 0)，这就导致矛盾. 因此总有充分大的 n，使 R_n 为一绝对值小于 1 的非零实数，这样 $S_n+R_n=0$ 便不可能成立. 这个矛盾证明了 e 不能是二次代数数. 定理证毕.

定理 8 e 不满足有理数域上任何次的代数方程. 即 e 是超

越数.

证明 首先指出若 $f(x)$为一 n 次多项式,记

$$F(x)=f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)$$

则经过简单计算,可得等式

$$e^b\int_0^b f(x)e^{-x}dx=e^bF(0)-F(b) \tag{1}$$

今假设定理结论不真,则 e 满足一个 m 次整系数不可约方程

$$\sum_{i=0}^{m}a_ie^i=0$$

为了导出矛盾,选择

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-m)^p$$

其中 p 为素数. 于是 $f(x)$的次数 $n=mp+p-1$.

将所选 $f(x)$代入恒等式(1),并令 $b=i\,(i=0,1,\cdots,m)$,再在(1)两端同乘 a_i 然后按 i 迭加,得

$$\sum_{i=0}^{m}a_ie^i\int_0^i f(x)e^{-x}dx=-\sum_{i=1}^{m}a_iF(i)-a_0F(0) \tag{2}$$

我们来证明,当素数 p 选得足够大,可有如下事实:

1° $F(i)$是可被 p 整除的整数($i=1,2,\cdots,m$);

2° $F(0)$是一不能被 p 整除的整数,从而推知(2)的右端为一非零整数;

3° (2)式左端绝对值小于 1,从而导致矛盾. 今依次证明如下:

1° 由 $f(x)$的选择,当 $j\leqslant p-1$ 时,有 $f^{(j)}(i)=0$. 当 $j\geqslant p$ 时,令 $f(x)=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=p-1}^{n}\alpha_kx^k$,其中 α_k是整数. 由

$$f^{(j)}(x)=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=j}^{n}k(k-1)\cdots(k-j+1)\alpha_kx^{k-j}$$

因为

$$k(k-1)\cdots(k-j+1)=j!\binom{k}{j}$$

以及 $j\geqslant p$, 所以 $p!$ 可以除尽 $k(k-1)\cdots(k-j+1)$ $(k=j,\cdots,n)$, 于是 $f^{(j)}(x)(j=p,\cdots,n)$的系数都是整数，且可被 p 整除，因此 $F(i)(i=1,2,\cdots,m)$是可被 p 整除的整数.

$$2^\circ\quad F(0)=\sum_{j=0}^{p-2}f^{(j)}(0)+f^{(p-1)}(0)+\sum_{j=1}^{n}f^{(j)}(0)$$

上式中，第一部分为 0, 第三部分根据 1° 的论证，它是可被 p 整除的整数．中间项 $f^{(p-1)}(0)=(-1)^{pm}(m!)^p$, 若选择 $p>m$，即可保证 $f^{(p-1)}(0)$是不能被 p 整除的整数．所以 $F(0)$是一不能被 p 整除的整数．若再让 $p>|a_0|$, 便可保证(2)式右端为一非零整数.

3° 由于

$$\left|\int_0^i\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p\cdots(x-m)^pe^{-x}dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(p-1)!}m^{p-1}m^p\cdots m^p\int_0^i e^{-x}dx\leqslant\frac{1}{(p-1)!}m^{mp+p-1}$$

从而可得

$$\left|\sum_{i=0}^{m}a_ie^i\int_0^i f(x)e^{-x}dx\right|\leqslant\frac{1}{(p-1)!}m^{mp+p-1}e^m\sum_{i=0}^{m}|a_i|$$

此式右端当 $p\to\infty$ 时趋于0, 因此只须选择 p 足够大, 即可保证(2)式左端为一绝对值小于 1 的数.

定理证毕.

(三) 1874 年德国年青数学家康托尔发表了题为《关于所有实代数数所成集合的一个性质》的论文, 证明了所有代数数组成一个可数集. 同时他又证明了全体实数是一个不能与可数集对等的无限集，由此立即推出在实数中一定存在着超越数．因为数轴上

的任何可数集合，其测度为0，即对于任给的正数 ε，不管它是多么小，总可以找到一串区间，把这个可数集合盖住，且这串区间的长度总和小于 ε. 所以全体实代数数在数轴上是太微不足道了，它只不过是一个不占任何长度的零测度集，从而说明了几乎所有的实数都是超越数！

定理 9 全体代数数是一个可数集.

证明 我们给出一个遍数全部代数数的方法. 对于任一个整系数不可约多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \qquad (a_0\geqslant 1)$$

令
$$N=n+a_0+|a_1|+\cdots+|a_n|$$

称为该多项式的指标. 于是，任一个整系数不可约多项式，对应有唯一的一个指标 N. 反过来，对于任一自然数 $N\geqslant 2$，可以有不止一个不可约多项式以其为指标. 但是对于任何自然数 N，显然以其为指标的不可约多项式的个数是有限的，而每一个不可约多项式，都仅包含有有限个代数数为其根. 于是，在每一指标 N 下，都只对应有限个代数数. 现在我们历数所有的指标 $N=2, 3, 4, \cdots$，而对于每一 N，将其对应的代数数作一排列，这样便得到了一个在所有指标下代数数的总排列，这个总排列显然穷尽了所有的代数数，因此代数数集合是可数集.

（四）1882年德国数学家林德曼 (F. Lindemann) 在厄尔米特证明了 e 为超越数的基础上，进一步推广他的方法，证明了 π 的超越性.

定理 10 π 是一个超越数.

本定理的证明颇费篇幅，故不在此赘述，有兴趣的读者可参阅[13].

林德曼定理的证明，因为直接关系到古典几何学的三大难题的最终解决，从而受到了整个数学界的关注，成为近代数学史上

的一件大事．所谓古典几何学的三大难题，是指不能用圆规直尺通过有限步骤解决下述作图问题：

（1）三等分任意角；

（2）二倍立方体；

（3）化圆为方．

前面两个问题都等价于要用圆规直尺，从已知线段出发，作出另一个线段，后者的长度等于一个三次方程的根（方程的常数项等于已知线段长）．但是使用圆规直尺，却只能作出系数所在域的二次代数扩张域里的数．若假定已知线段长为1，则用圆规直尺，只能作出有理数或二次代数数．多次使用圆规直尺，只能作出2^k次代数数，而不能作出三次代数数．因而问题(1)与(2)的不可解性，只须应用域扩张理论中的初步知识[2]，即足以说明(*)．问题(3)则等价于要作一条长度为$\sqrt{\pi}$的线段．为了要解答作出$\sqrt{\pi}$的可能性，就必须弄清π是否是代数方程的根以及是哪一类代数方程的根．早在1761年，法国数学家朗伯尔(J. H. Lambert)应用连分数的方法，证明了π是无理数．但仅仅知道π的无理性并不能解决化圆为方的问题．而为了回答这个问题，必须进一步指明π是属于哪一类的无理数，特别是它是否属于圆规直尺作图所能达到的那一类无理数．林德曼定理证明了π为超越数，从而推知$\sqrt{\pi}$亦为超越数，这就从根本上解答了上述的问题．因为从单位

(*) 在二倍立方体问题中，假使已知立方体的边长为1，欲求立方体的边长为x，则根据二倍立方体的要求，x需满足方程$x^3-2=0$，但x^3-2是有理域上的不可约多项式，因此x是一个三次代数数，不可能用圆规直尺作出．在三等分角问题中，我们只须证明，比如三等分60°角不可能．而三等分60°角的问题等价于作出$x=\cos 20°$的边长．但由三角公式$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$即知$x$是方程$\frac{1}{2}=4x^3-3x$的根，但是$4x^3-3x-\frac{1}{2}$是有理域上的不可约多项式，因此$x$是一个三次代数数，不可能用圆规直尺作出．上述两个多项式的不可约性都可以根据前面定理2的底注，即爱森斯坦不可约准则加以证明．

线段出发，应用有限次的圆规直尺作图，根本不可能作出长度为超越数的线段. 关于这方面的论述，有兴趣的读者可参阅[12].

（五）在厄尔米特和林德曼的工作之后，人们自然提出了这样的问题：对一般的三角函数、反三角函数、对数函数和指数函数而言，当自变量取值为代数数时，其函数值是否为超越数？1895年德国数学家维尔斯特拉斯证明了下述推广的林德曼定理，常称为林德曼-维尔斯特拉斯定理，解答了上面提出的问题.

定理 11 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是互不相等的代数数，则 $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \cdots, e^{\alpha_n}$ 在代数数域上是线性无关的. 即若有 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e^{\alpha_i}=0$，便可推出所有 $a_i=0$，其中 a_i 为代数数.

定理的证明可参阅[13]. 根据这个定理，可立即得到下述推论：

推论 下列诸数均为超越数：

1. e, π；

2. $e^{\alpha}, \sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{sh}\alpha, \operatorname{ch}\alpha, \operatorname{th}\alpha, \cdots$，其中 α 为非零代数数；

3. $\ln\alpha, \arcsin\alpha, \cdots$ 等 2. 中所列函数的反函数，其中 α 为不等于 0 和 1 的代数数.

证明 只对 π、$\cos\alpha$ 二例进行，其余部分类同，留给读者.

π：用反证法，假若 π 是代数数，则 $i\pi$ 亦为代数数，于是由 $e^{i\pi}+e^0=\cos\pi+1=0$，即得 $e^{i\pi}$ 与 e^0 在代数数域上线性相关，与定理11矛盾.

$\cos\alpha$：假若 $\cos\alpha=a$ 是代数数，则由 $\frac{1}{2}e^{i\alpha}+\frac{1}{2}e^{-i\alpha}-ae^0=\cos\alpha-a=0$，即得 $e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$ 与 e^0 在代数数域上线性相关，与定理11矛盾.

（六）1900 年，德国数学家希尔伯特(D. Hilbert)在巴黎举行

的国际数学家代表大会上，提出了著名的23个研究课题．其中第七个问题是：α、β 为代数数，$\alpha\neq 0,\ 1$；β 不为实有理数．问 α^β 是否为超越数？如 $2^{\sqrt{2}}$，$(-1)^{-i}=e^\pi$ 是否为超越数？鉴于这个问题较难，希尔伯特曾预言，它的解决当在解决数论上著名难题费尔玛(P. Férmat)猜测(*)之后．然而事实却未如希尔伯特所料，本世纪三十年代，苏联数学家盖尔封得(A. O. Гельфонд)和德国数学家施耐德(T. Schneider)独立地给出了希尔伯特第七问题的完全解答，然而费尔玛大定理的完全解决，至今尚音讯渺茫．

定理12(盖尔封得-施耐德定理)　若 α、β 为代数数，$\alpha\neq 0,1$；β 不为实有理数，则 α^β 为一超越数．

定理同时回答了 $2^{\sqrt{2}}$、e^π 都是超越数．定理的证明较长且需较多辅助知识，有兴趣的读者可参阅[13]．

在希尔伯特第七问题得到了解决之后，人们对于超越数的认识虽有了进一步的深入，但总的说来，还是比较贫乏的．例如对于熟知的欧拉常数 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$，不仅至今尚无法证明其是否为超越数，甚至连它是无理数还是有理数也不清楚．在代数数和超越数的理论中，还有许多问题，有待于人们去作进一步的探索．

习　题

1．证明二次实代数数在实数中稠密．

2．证明有理数域经过连续两次单扩张后所得的域仍为一单扩张域．

3．写出 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$，$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{3}}$ 所满足的整系数方程．

4．证明方程 $x^3+\sqrt[3]{2}x-1=0$ 的根都是代数数．

(*)　费尔玛猜测是指：三元方程 $x^n+y^n=z^n$ 当 $n>2$ 时无整数解．

5. 证明定理 8 中的恒等式(1).

6. 写出一个与定理 6 中的 ξ 不同的刘维尔数.

7. 证明任何有理数有且仅有一次的有理逼近.

8. 证明林德曼-维尔斯特拉斯定理的推论.

9. 下列诸数哪些是超越数？为什么？

$\sqrt[3]{1+\pi}$, $\frac{e}{1+e^2}$, $\sin 2.18$, $(-1)^{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{4\pi}{15}$, $\ln(1+i)$,

$\log_5\sqrt{e}$, $\arcsin 0.4$, $e^{\frac{\pi}{4}}$, i^i, $e^{\frac{\pi}{7}i}$

10. 怎样用圆规直尺作出长为 $\sqrt[4]{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 的线段？

参 考 书 目

[1] B. L. 范德瓦登著，丁石孙、曾肯成、郝炳新译，万哲先校，《代数学 I》，科学出版社，1963.

[2] G. Birkhoff, S. MacLane, 《A Survey of Modern Algebra》，第三版，Macmillan, New York, 1965.

[3] C. B. 波耶著，上海师范大学数学系翻译组译，《微积分概念史》，上海人民出版社，1977.

[4] И. П. 那汤松著、徐瑞云译，《实变函数论》，高等教育出版社，1955.

[5] E. 兰道著，刘绂堂译，《分析基础》，高等教育出版社，1958.

[6] L. W. Cohen, 《The Structure of the Real Number System》, Princeton, 1965.

[7] W. Sierpinski, 《Arytmetyka Teoretyczna》, Warszawa, 1955.

[8] 江泽坚、吴智泉、周光亚合编，《数学分析》(上册)，高等教育出版社，1960.

[9] 杨宗磐，《数学分析入门》，科学出版社，1965.

[10] 华罗庚，《数论导引》，科学出版社，1957.

[11] G. H. Hardy, E. M. Wright, 《An Introduction to the Theory of Numbers》，第三版. Oxford, 1954.

[12] R. Courant, H. Robbins, 《What is Mathematics?》Oxford, 1941.

[13] I. Niven, 《Irrational Numbers》, The Mathematical Association of American, 1956.

[14] A. Robinson, 《Non-standard Analysis》, Amsterdam, 1973.

[15] M. Kline, 《Mathematical Thought from Ancient to Modern Times》, New York, 1972.

[16] J. Dieudonné, 《Foundations of Modern Analysis》, New York

and London, 1960.

[17] Г. М. 菲赫金哥尔茨著, 叶彦谦等译, 樊映川校订, 《微积分学教程》, (修订本)一卷一分册, 人民教育出版社, 1959.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝实数的构造理论
作者＝ＢＥＸＰ
ＳＳ号＝
加密地址＝ｂｏｏｋ：／／２０２．１９５．８６．９／０４／ｄｉｓｋｊｙ１／ｊｙ１／５４／２４／０００００１．ｐｄｇ
下载位置＝ｈｔｔｐ：／／２０２．１９５．８６．９／０４／ｄｉｓｋｊｙ１／ｊｙ１／５４／２４／！０００００１．ｐｄｇ

封面
书名
版权
前言
目录
正文